

S T A T I S T I C S

الإحصاء

كامل فليفل فتحي حمدان

جامعة البلقاء جامعة البلقاء
كلية الهندسة التكنولوجية كلية العلوم الإدارية والمالية



دار المناهج للنشر والتوزيع

جميع الحقوق محفوظة

1432 هـ 2011 م

All Rights Reserved



دار المناهج للنشر والتوزيع

عمان / الأردن / شارع الملك حسين

بناية الشركة المتحدة للتأمين

هاتف 4650624 فاكس 4650664

ص.ب / 215308 عمان 11122 الأردن

Dar Al-Manahej

Publishers & Distributor

Tel : (00962 6) 4650624

fax: 009626 4650664

Amman-King Hussein St.

P.O.Box: 215308 Amman 11122 Jordan

www.daralmanahej.com

info@daralmanahej.com

manahej9@hotmail.com

faviz@daralmanahej.com

المملكة الأردنية الهاشمية

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبات والوثائق الوطنية

2009 / 2 / 430

519.5

فيل، كامل

الإحصاء / كامل فيل، فني حمدان

عمان: دار المناهج ، 2009

() ص

ر.: 2009 / 2 / 430

الوصف: الإحصاء الوصفي

تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

جميع الحقوق محفوظة: فإنه لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات أو نقله أو استنساخه بأي شكل من الأشكال دون إذن خطي مسبق من الناشر، كما أهدى مجلس الإفتاء الأردني بكتابه رقم 2001/3 بتحريم نسخ الكتب وبيعها دون إذن المؤلف والناشر.

المحتويات

| | |
|---|-------|
| 9 | مقدمة |
|---|-------|

الوحدة الأولى

جمع البيانات وتبويبها

Collecting and Organizing Data

| | |
|----|---------------------------------------|
| 13 | مقدمة |
| 13 | الطريقة الإحصائية |
| 14 | العينة وطرق اختيارها |
| 15 | 1- طريقة العينة العشوائية البسيطة |
| 16 | 2- طريقة العينة الطبقية |
| 17 | 3- طريقة العينة العنقودية |
| 17 | 4- طريقة العينة العشوائية المنتظمة |
| 17 | طريقة العينة المعيارية |
| 18 | طرق عرض البيانات الإحصائية |
| 18 | 1- طريقة الجداول |
| 18 | 2- طريقة المستطيلات |
| 19 | 3- طريقة الخط البياني |
| 21 | 4- طريقة الدائرة |
| 22 | 5- طريقة الصور |
| 23 | التوزيعات التكرارية - تمثيلها بيانياً |
| 29 | الجداول المقفلة والجداول المفتوحة |
| 31 | تمارين |

الوحدة الثانية

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

| | |
|----|-------------------|
| 37 | المئينات |
| 46 | العشرية والربيعات |

| | |
|----|--|
| 47 | أولاً: الوسط الحسابي |
| 54 | ثانياً: الوسط |
| 56 | ثالثاً: المتوال |
| 58 | العلاقة الخطية بين الوسط والوسط والمتوال |
| 59 | العزوم والالتواء والتفرطح |
| 65 | تمارين |

الوحدة الثالثة

مقاييس التشتت

Measures of Dispersion

| | |
|----|---------------------------|
| 71 | أولاً: المدى |
| 72 | ثانياً: نصف المدى الربيعي |
| 73 | ثالثاً: الانحراف المتوسط |
| 76 | رابعاً: الانحراف المعياري |
| 83 | معامل الاختلاف |
| 85 | تمارين |

الوحدة الرابعة

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

| | |
|-----|--|
| 91 | مقدمة |
| 91 | جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط |
| 93 | معامل الارتباط |
| 99 | أثر التحولات الخطية على معامل الارتباط |
| 100 | الانحدار |
| 109 | تمارين |

الوحدة الخامسة

نظرية الاحتمالات

Probability Theory

| | |
|-----|---------------|
| 115 | الفضاء العيني |
|-----|---------------|

| | |
|-----|---|
| 118 | التكرار النسبي والاحتمال |
| 122 | قانون جمع الاحتمالات |
| 124 | الحوادث المستقلة (قانون ضرب الاحتمالات) |
| 128 | الاحتمال المشروط ونظرية بيز |
| 135 | المتغيرات العشوائية |
| 147 | تمارين |

الوحدة السادسة

التوزيعات الاحتمالية Probability Distributions

| | |
|-----|-------------------------------|
| 155 | مقدمة |
| 155 | التوزيعات الاحتمالية المنفصلة |
| 155 | 1- توزيع ذات الحدين |
| 158 | 2- توزيع بواسون |
| 159 | التوزيعات الاحتمالية المتصلة |
| 159 | 1- التوزيع الطبيعي |
| 174 | 2- توزيع t |
| 175 | 3- توزيع كاي تربيع |
| 177 | تمارين |

الوحدة السابعة

التقدير واختبار الفرضيات Estimation and Testing Hypothesis

| | |
|-----|-------------------------|
| 185 | أولاً: التقدير الإحصائي |
| 185 | المعلمة الإحصائية |
| 186 | المجتمع الإحصائي |
| 194 | ثانياً: اختبار الفرضيات |
| 205 | تمارين |

الوحدة الثامنة
الأرقام القياسية
Index Numbers

| | |
|-----|--------------------------|
| 211 | مفهوم الرقم القياسي |
| 212 | الرقم القياسي البسيط |
| 215 | الأرقام القياسية المرجحة |
| 219 | رقم مارشال |
| 221 | تمارين |

الوحدة التاسعة
السلاسل الزمنية
Time Services

| | |
|-----|-----------------------------------|
| 227 | مقدمة |
| 227 | تمثيل السلسلة الزمنية بيانيا |
| 228 | معامل الخشونة والمتوسطات المتحركة |
| 232 | مركبات السلاسل الزمنية |
| 232 | تقدير مركبة الاتجاه |
| 242 | تقدير المركبة الفصلية |
| 247 | تمارين |
| 251 | ملحق (1) |
| 261 | ملحق (2) |
| 269 | فهرس المصطلحات |
| 277 | المراجع |

مَقَدِّمَةٌ

نُحَمِّدُ اللَّهَ عَلَى نِعَمِهِ وَفَضْلِهِ كَمَا يَنْبَغِي لَجَلَالِ وَجْهِهِ وَعَظِيمِ سُلْطَانِهِ وَالصَّلَاةَ وَالسَّلَامَ عَلَى الصَّادِقِ الْأَمِينِ مُحَمَّدِ بْنِ عَبْدِ اللَّهِ وَبَعْدُ:

فهذه الطبعة الثالثة من كتابنا الإحصاء نضعها بين يدي طلابنا الأعزاء راعيناً فيها تطوير المعلومات وتحديثها بشكل ميسر في كل وحداته التي تغطي حاجة الطلاب، حيث تم كتابة المعادلات والرموز باللغة الإنجليزية. وقد تكون الكتاب من تسع وحدات هي:

الوحدة الأولى : تعالج موضوع عرض البيانات الإحصائية وتبويبها.

الوحدة الثانية: تعالج مقاييس النزعة المركزية،

الوحدة الثالثة : تختص بمقاييس التشتت.

الوحدة الرابعة تعرض موضوع الارتباط والانحدار،

الوحدة الخامسة: تعالج موضوع الاحتمالات

الوحدة السادسة: تتعلق بموضوع التوزيعات الاحتمالية.

الوحدة السابعة : التقدير واختبار الفرضيات.

الوحدة الثامنة : تهتم بموضوع الأرقام القياسية.

الوحدة التاسعة : تهتم بالسلاسل الزمنية

وقد حرصنا في هذه الطبعة على وضع مسائل وأمثلة متنوعة تناسب كافة مستويات الطلبة في الجامعات.

ونعود ونؤكد على إخواننا المدرسين وكذلك أعزائنا الطلبة التكرم علينا بإبداء ملاحظاتهم وأفكارهم عن فقرات هذا الكتاب للاستفادة منها في الطباعات القادمة إن شاء الله ولهم منا جزيل الشكر والعرفان.

وفي الختام لا يسعنا إلا أن نشكر كل من ساهم في إخراج هذا الكتاب للقارئ الكريم.

والله ولي التوفيق

المؤلفان



الوحدة الأولى

جمع البيانات وتبويبها

Collecting and Organizing Data

جمع البيانات وتبويبها **Collecting and Organizing Data**

مقدمة

يُبنى علم الإحصاء على مجموعة عناصر أساسية نجملها في هذا التعريف.
تعريف: علم الإحصاء هو مجموعة النظريات والطرق العلمية التي تبحث في جمع البيانات وعرضها وتحليلها واستخدام النتائج في التنبؤ أو التقرير واتخاذ القرارات بناء على ذلك.

يقسم علم الإحصاء إلى قسمين:

- 1- الإحصاء الوصفي: الذي يهتم بجمع البيانات الإحصائية وتبويبها فقط.
- 2- الإحصاء الاستدلالي: ويهتم في اتخاذ القرارات المبينة على النتائج المستخرجة من البيانات التي جمعت.

Statistical Investigation الطريقة الإحصائية

تعريف: الطريقة الإحصائية بأنها الخطوات المتبعة في عمل أي دراسة أو بحث إحصائي.

وهذه الخطوات هي:

أ- جمع البيانات الإحصائية:

وهي قيم المشاهدات للتجارب التي يجريها الباحث وكلما كانت دقيقة كلما كانت القرارات المتخذة بصددتها أكثر صدقاً، وهناك طريقتين لجمع البيانات الإحصائية هي:

1- طريقة المسح الشامل.

2- طريقة العينة.

ب- تنظيم وعرض البيانات:

بعد جمع البيانات يقوم الباحث في وضع هذه البيانات في جداول مناسبة أو عرضها في رسوم بيانية أو أشكال هندسية أو توزيعات تكرارية.

ج- تحليل البيانات:

وهي معالجة البيانات باستعمال العلاقات الرياضية واستخراج قيم واقرانات معينة تعبر عن هذه البيانات.

د- استقراء النتائج واتخاذ القرارات:

وهي إصدار الأحكام أو عمل الاستنتاجات الإحصائية حول المجتمع الإحصائي في ضوء النتائج المستخرجة.

أساليب جمع البيانات:

تجمع البيانات بأساليب عدة منها:

- 1- الأسلوب المباشر: عن طريق الميدان مباشرة.
- 2- الأسلوب غير المباشر: عن طريق السجلات أو الوثائق التاريخية.
- 3- أسلوب الاستبيان: وهي رزمة من الأوراق تحتوي على مجموعة من الأسئلة والاستفسارات تعبئ من قبل الشخص الخاضع للبحث.
- 4- أسلوب المقابلات الشخصية: وهي السؤال المباشر من قبل الباحث.
- 5- أسلوب الاختبارات الخاصة: أسلوب خاص يستخدم في حالات محددة فقط مثل اختبارات الذكاء.

العينة وطرق اختيارها Sampling

تعريف: العينة مجموعة جزئية من المجتمع الإحصائي.

تؤخذ العينة بعدة طرق حتى تكون ممثلة للمجتمع تمثيلاً صادقاً وهذا يتطلب أمرين:

- 1- تحديد هدف الدراسة: ويحدد الهدف بطرح أسئلة مثل لماذا نأخذ العينة؟ ما الذي نريده منها... الخ.
- 2- تحديد المجتمع الإحصائي: والمجتمع الإحصائي هو مجموعة كل العناصر قيد الدراسة ويسمى أحياناً مجتمع الهدف. وتسمى المجموعة التي تؤخذ منها العينة بمجتمع العينة. ونلاحظ أن مجتمع العينة جزء من مجتمع الهدف.

مثال:

إذا أردنا دراسة الصعوبات التي تواجه طلبة البرنامج التجاري في كليات المجتمع في مادة الإحصاء، فيكون مجتمع الهدف: هو جميع طلبة البرنامج التجاري في كليات المجتمع.

ومجتمع العينة يكون الكليات التي تؤخذ منها العينة مباشرة.
تعريف: حجم المجتمع (العينة) هو عدد عناصر المجتمع (العينة).

طرق اختيار العينة

1- طريقة العينة العشوائية البسيطة Simple Random sample

وهي أي عينة بحجم معين لها نفس الاحتمال. ويتم اختيارها بالطريقة التالية:
أ- إذا كانت العينة صغيرة (أقل من 30 مشاهدة) نعطي المشاهدات بطاقات متشابهة مرقمة ترقيماً متسلسلاً من (1) لغاية (n) حيث n حجم المجتمع، ثم نسحب بطاقات عشوائية بحجم العينة التي نريد.
ب إذا كانت العينة كبيرة (أكبر من 30 مشاهدة) نعطي المشاهدات أرقاماً متسلسلة من (صفر) لغاية (n-1) حيث n حجم المجتمع بنفس العدد من الخانات (عدد خانات (n-1)). ثم نختار من جدول الأرقام العشوائية المرفق في نهاية الكتاب أرقاماً بحجم العينة شريطة أن تكون الأرقام أقل من (n-1).
وسنوضح ذلك بالمثال اللاحق.

ملاحظة: يمكن استخدام هذه الطريقة إذا كان المجتمع صغيراً.

مثال:

إذا أردنا اختيار عينة مكونة (10) طلاب من مجتمع مكون من (900) طالب،
نتبع الخطوات التالية:

أ- نعطي الطلاب أرقاماً متسلسلة من (000) ولغاية (899).

ب- نختار عشرة أرقام من جدول الأرقام العشوائية ونبدأ من اليسار ونتجه عمودياً للأسفل فإذا كان الرقم أقل أو يساوي (899) نقبله وبغير ذلك نرفضه، فتكون العينة مكونة من الأرقام التالية:

517, 540, 459, 35, 649, 156, 216, 505, 71, 279

ملاحظة: عند اختيار أرقاماً عشوائية من جدول الأرقام العشوائية يمكننا البدء من أي مكان من الجدول سواء أفقياً أو عمودياً ولكننا اتبعنا الأسلوب السابق لتوحيد الإجابات بين الطلبة.

2- طريقة العينة الطبقية Stratified sample

يقسم المجتمع الإحصائي إلى طبقات حسب صفات معينة ثم نختار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة من هذه الطبقات بنسبة حجم كل طبقة. وتعطى النسبة بالقاعدة التالية:

$$\text{عدد العناصر الممثلة للطبقة في العينة} = \frac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع}} \times \text{حجم العينة}$$

مثال:

اختار عينة مكونة من (20) طالب من مجتمع الجامعة الأردنية المكون من (1000) طالب منهم (400) طالب سنة أولى (300) طالب سنة ثانية (200) طالب سنة ثالثة و (100) طالب سنة رابعة.

الحل:

$$\text{عدد عناصر طلاب السنة الأولى في العينة} = 20 \times \frac{400}{1000} = 8 \text{ طلاب}$$

$$\text{عدد عناصر طلاب السنة الثانية في العينة} = 20 \times \frac{300}{1000} = 6 \text{ طلاب}$$

$$\text{عدد عناصر طلاب السنة الثالثة في العينة} = 20 \times \frac{200}{1000} = 4 \text{ طلاب}$$

$$\text{عدد عناصر طلاب السنة الرابعة في العينة} = 20 \times \frac{100}{1000} = 2 \text{ طالبان}$$

3- طريقة العينة العنقودية Cluster Sample

يقسم المجتمع الإحصائي إلى مجموعات جزئية واضحة تسمى كل منها طبقة. ثم نقسم الطبقة إلى طبقات أخرى وهكذا، ونختار عينة عشوائية بسيطة من الطبقة الأخيرة تتناسب مع حجم الطبقة.

مثال:

إذا أردنا دراسة فرص العمل لطلاب الجامعة الأردنية بعد التخرج. نقوم في البداية بتقسيم الجامعة إلى كليات مثل كلية الطب، الهندسة، العلوم، التجارة... الخ، ثم نقوم بتقسيم هذه الكليات إلى تخصصات ونأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل تخصص ونجري الدراسة عليها.

4- طريقة العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random sample

نختار الأرقام بهذه الطريقة بصورة منتظمة. بحيث يكون الفرق بين أي اختياريين متتاليين يساوي مقداراً ثابتاً.

مثال:

إذا أردنا أن نجري دراسة على شارع مكون من (50) عمارة، وأردنا اختيار عينة مكونة من (5) عمارات فإننا نختار كل عاشر عمارة. فمثلاً لو اخترنا العمارة رقم 7 تكون الثانية رقم 17 والثالثة رقم 27، والرابعة رقم 37، والخامسة رقم 47.

5- طريقة العينة المعيارية Standard sample

وهي العينة التي تتفق مع المجتمع الإحصائي في المقاييس الإحصائية فيكون لهما نفس الوسط والوسيط والانحراف المعياري. وتكون أكثر صدقاً في تمثيل المجتمع من الطرق الأخرى.

مثال:

إذا أراد مصنع للأدوية دراسة مدى فعالية دواء ما لشفاء مرض معين فإنه يطبق هذا الدواء على أول (10) مريض ثم يرى مدى فعاليته ثم أول (20) مريض ثم يرى مدى فعاليته ثم أول (30) مريض.. الخ إلى أن تثبت فعالية الدواء فيعمم هذا الدواء لعلاج المرض.

طرق عرض البيانات الإحصائية Graphic Presentation of data

يتم عرض البيانات بطرق سهلة وواضحة ليسهل على الباحث دراسة ظاهرة ما. ويتم العرض بالطرق التالية:

1- طريقة الجدول Table method

وهي عرض الظاهرة مع مسمى أو زمن ضمن إطار معين يسمى جدولاً.

مثال:

الجدول التالي يوضح عدد الطلبة في بعض كليات المجتمع في عام 2001.

| الكلية | عدد الطلبة |
|-----------|------------|
| الكلية أ | 300 |
| الكلية ب | 530 |
| الكلية جـ | 570 |
| الكلية د | 1200 |

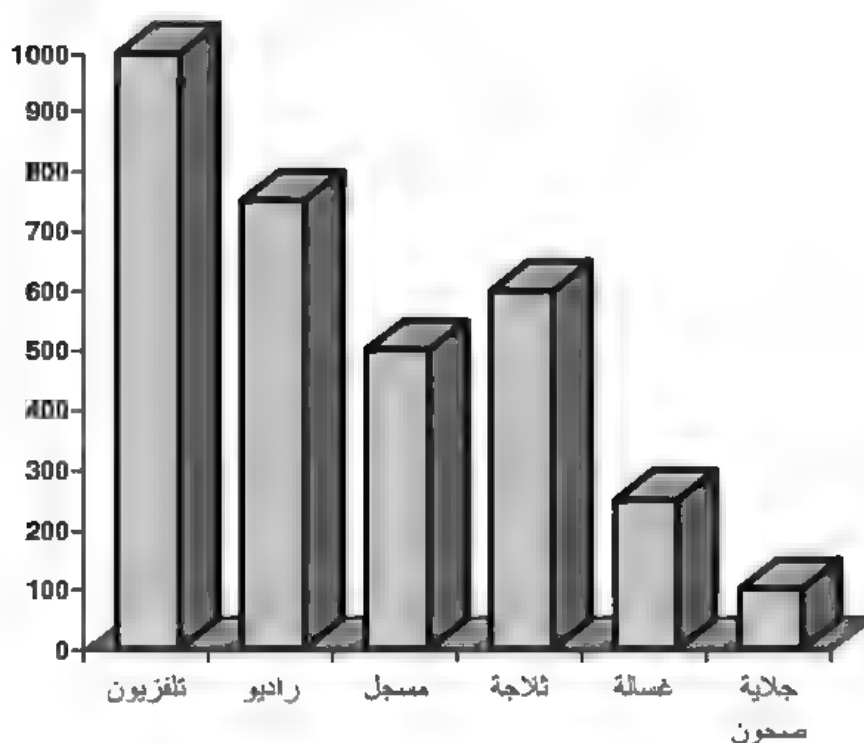
2- طريقة المستطيلات أو الأعمدة Rectangular method

يتم العرض بهذه الطريقة برسم محورين أفقي وعمودي يمثل الأفقي مسمى الظاهرة (أو الزمن) والعمودي يمثل قيمة الظاهرة ثم نرسم مستطيل قاعدته على المسمى، وطوله بقيمة المسمى، بمقياس رسم مناسب.

مثال:

الجدول التالي يمثل مبيعات شركة ما للأجهزة الكهربائية في سنة 2004 مثل هذا الجدول بطريقة المستطيلات.

| نوع الجهاز | عدد الأجهزة |
|------------|-------------|
| تلفزيون | 1000 |
| راديو | 750 |
| مسجل | 500 |
| ثلاجة | 600 |
| غسالة | 250 |
| جلالية صحن | 100 |



3- طريقة الخط البياني Line method

تستعمل لعرض تغير ظاهرة مع مسمى أو زمن وذلك برسم محورين أفقي وعمودي ورصد قيم الظاهرة مع الزمن أو المسمى بنقطة في المستوى على الصورة (المسمى أو الزمن، قيمة الظاهرة) ويكون التمثيل بنوعين من الخطوط:

أ- الخط المنكسر: ويكون بالوصل بين النقاط بخطوط مستقيمة.

ب- الخط المنحني: ويكون الوصل بين النقاط بخطوط منحنية.

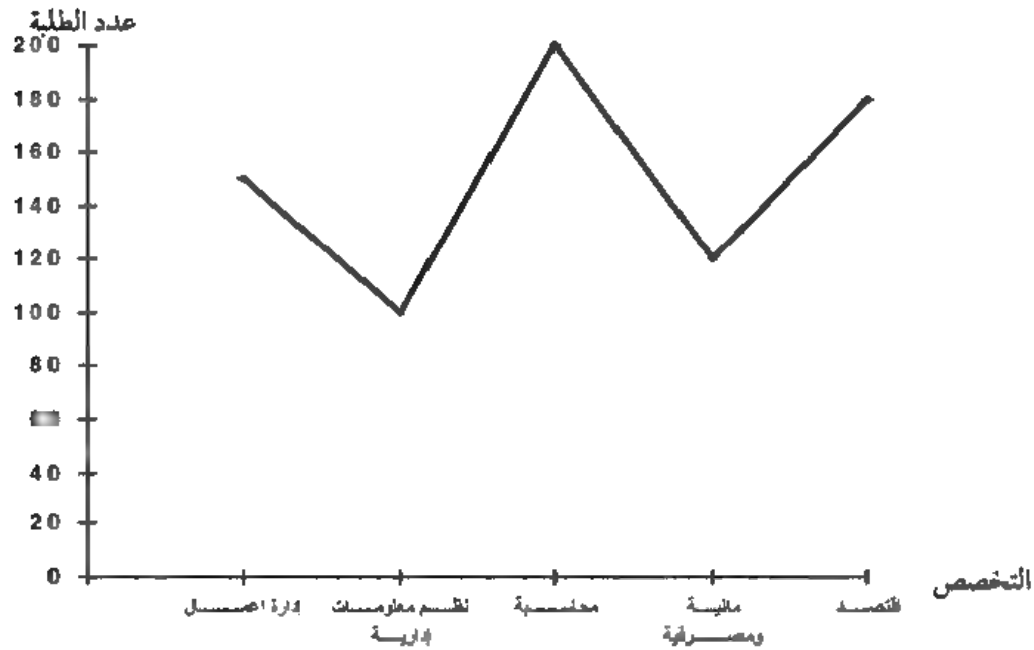
مثال:

الجدول التالي يمثل أعداد الطلبة في مستوى البكالوريوس في كلية التجارة في إحدى الجامعات الأردنية.

| عدد الطلبة | التخصص |
|------------|--------------------|
| 150 | إدارة أعمال |
| 100 | نظم معلومات إدارية |
| 200 | محاسبة |
| 120 | مالية ومصرفية |
| 180 | اقتصاد |

مثل هذا الجدول بطريقة الخط المنكسر:

الحل:



تمرين:

مثل الجدول السابق بطريقة الخط المنحني.

4- طريقة الدائرة Circle method

وتكون بتقسيم الدائرة الكلية إلى قطاعات بنسب قيم الظاهرة ومحسب قياس زاوية القطاع بالطريقة التالية:

$$\text{قياس زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة الظاهرة}}{\text{المجموع الكلي لقيم الظاهرة}} \times 360^\circ$$

مثال:

في سوق عمان المالي، إذا كان عدد الأسهم المباعة في أحد الأيام ممثلة بالجدول التالي:

| القطاع | عدد الأسهم |
|---------|------------|
| البنوك | 29000 |
| الخدمات | 12000 |
| التأمين | 6000 |
| الصناعة | 123000 |
| المجموع | 170000 |

مثل هذا الجدول بطريقة الدائرة.

نجد أولاً قياس الزاوية لكل قطاع فيكون:

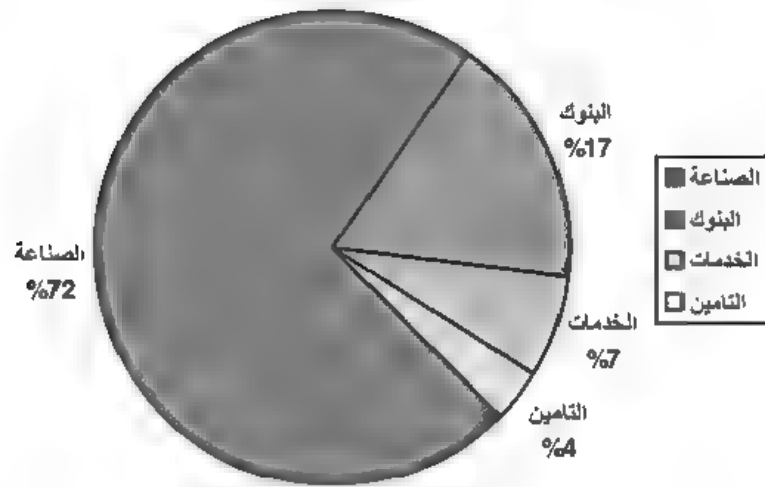
$$\bullet \text{ زاوية قطاع البنوك} = \frac{29000}{170000} \times 360^\circ \approx 61^\circ$$

$$\bullet \text{ زاوية قطاع الخدمات} = \frac{12000}{170000} \times 360^\circ \approx 25^\circ$$

$$\bullet \text{ زاوية قطاع التأمين} = \frac{6000}{170000} \times 360^\circ \approx 13^\circ$$

$$\bullet \text{ زاوية قطاع الصناعة} = \frac{123000}{170000} \times 360^\circ \approx 261^\circ$$

فيكون الجدول ممثلاً بالدائرة التالية:












5- طريقة الصور Picture method

في هذه الطريقة يتم تمثيل البيانات بصور لجسم الظاهرة المراد دراستها، بشكل متناسب.

مثال:

في شركة لبيع البطاريات الجافة، كانت مبيعات الشركة لثلاث سنوات متتالية هي (10000) بطارية في عام 1990، (15000) بطارية في عام 1991، (17500) بطارية في عام 1992، اعرض هذه البيانات بطريقة الصور.

| السنة | عدد البطارية |
|-------|---|
| 1990 |   |
| 1991 |    |
| 1992 |     |

مثلت كل (5000) بطارية بصورة بطارية واحدة.

التوزيعات التكرارية تمثيلها بيانياً Frequency Distribution

بناء جدول التوزيعات التكرارية: جدول التوزيع التكراري ما هو إلا وسيلة لاختصار حجم البيانات ووضعها في حيز مناسب يمكننا من الإحاطة بها من جميع جوانبها.

ولبناء جدول التوزيع التكراري نتبع الخطوات التالية والتي سندرجها ضمن المثال التالي:

مثال:

كون جدول التوزيع التكراري لعلامات (30) طالباً في امتحان ما:

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 46 | 49 | 48 | 58 | 54 | 50 |
| 40 | 62 | 37 | 48 | 54 | 75 |
| 54 | 48 | 59 | 45 | 34 | 58 |
| 47 | 61 | 49 | 44 | 68 | 39 |
| 63 | 56 | 43 | 57 | 41 | 45 |

1- نجد المدى المطلق (أو المدى) Range للبيانات: وهو

$$\text{المدى المطلق} = \text{أكبر مشاهدة} - \text{أصغر مشاهدة}$$

$$\text{وفي هذه البيانات المدى المطلق} = 75 - 34 = 41$$

2- نحدد عدد فئات مبدئي مناسب لعدد البيانات:

وفي هذه البيانات نحدد عدد الفئات 7 فئات

3- نجد طول الفئة: وهو

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}}$$

$$\text{وفي هذا التوزيع طول الفئة} = \frac{41}{7} = 5,7 \approx 6$$

ملاحظة: إذا كان ناتج القسمة السابقة عدد غير صحيح نقربه لأقرب عدد صحيح.

4- نحدد الحدود الفعلية للفئات:

في البداية نجد الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى بأخذ أصغر قيمة في المشاهدات أو أقل منها بواحد ومن ثم نطرح منها نصف وحدة، ويكون في هذه المشاهدات هو

$$34 - 0.5 = 33.5$$

وبعدها نجد الحد الأعلى الفعلي للفئة وذلك بإضافة طول الفئة إلى الحد الأدنى الفعلي. فتصبح الفئة الأولى هي 33.5-39.5 ثم نحدد الفئات الأخرى بحيث يكون الحد الأدنى الفعلي للفئة هو الحد الأعلى الفعلي للفئة التي تسبقها. بحيث تكون آخر فئة تحوي أكبر مشاهدة.

وفي هذه البيانات تكون الحدود الفعلية للفئات هي:

$$33.5 - 39.5$$

$$39.5 - 45.5$$

$$45.5 - 51.5$$

$$51.5 - 57.5$$

$$57.5 - 63.5$$

$$63.5 - 69.5$$

$$69.5 - 75.5$$

وإذا أردنا إيجاد الفئات فإننا نضيف إلى الحد الأدنى الفعلي للفئة نصف وحدة ونطرح من الحد الأعلى الفعلي نصف وحدة فتكون الفئة الأولى مثلاً هي: 34-39.

ملاحظة: في بعض الحالات يكون عدد الفئات الناتج يختلف عن عدد الفئات المحدد في البداية وهذا ليس خطأ والسبب في ذلك هو كون البيانات هي بيانات منفصلة.

5- نفرغ البيانات في الجدول بوضع إشارة (/) لكل مشاهدة محتواه في الفئة وتكون الإشارة الخامسة مستعرضة وذلك لسهولة الجمع.

6- تجمع الإشارات لكل فئة لتكون تكرار الفئة.

7- نجد مركز الفئة والذي يكون:

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2} = \frac{\text{الحد الأدنى الفعلي} + \text{الحد الأعلى الفعلي}}{2}$$

$$\text{فمثلاً مركز الفئة الأولى} = \frac{39 + 34}{2} = \frac{73}{2} = 36,5$$

بناءً على الخطوات السابقة نكون جدول التوزيع التكراري التالي:

| مركز الفئة xi | التكرار fi | الإشارات | الحدود الفعلية Boundaries | الفئات classes |
|---------------------|---------------|----------|------------------------------|-------------------|
| 36.5 | 3 | // | 33.5 39.5 | 34 39 |
| 42.5 | 6 | //// / | 39.5 – 45.5 | 40 – 45 |
| 48.5 | 8 | //// /// | 45.5 – 51.5 | 46 – 51 |
| 54.5 | 5 | //// | 51.5 – 57.5 | 52 57 |
| 60.5 | 6 | //// / | 57.5 – 63.5 | 58 63 |
| 66.5 | 1 | / | 63.5 – 69.5 | 64 – 69 |
| 72.5 | 1 | / | 69.5 75.5 | 70 - 75 |

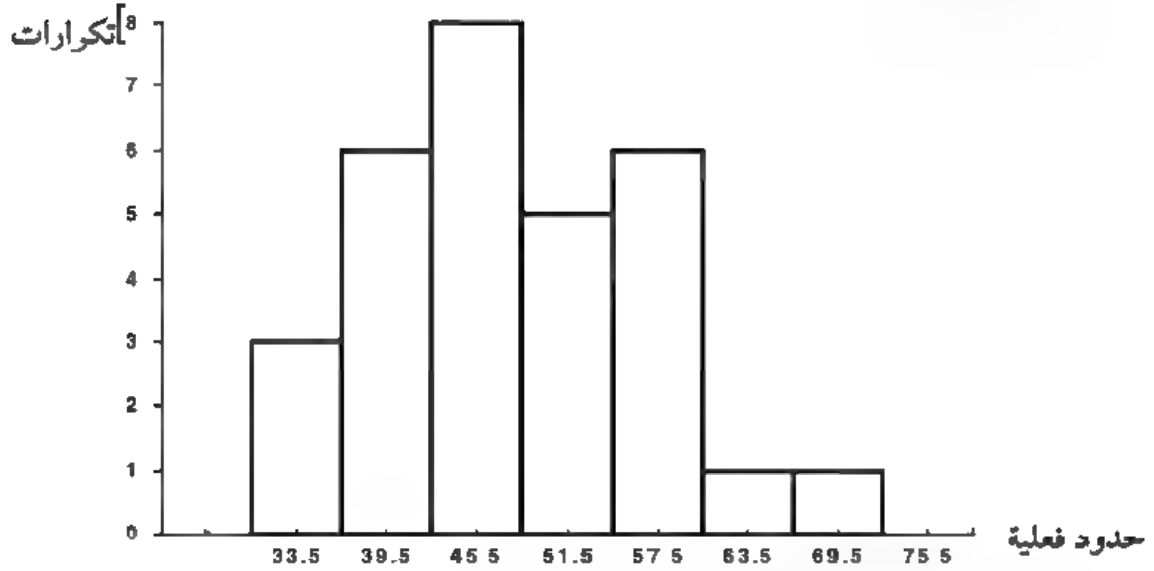
يسمى هذا الجدول والذي تكون أطوال فئاته متساوية توزيعاً تكرارياً منتظماً، أما إذا كانت فئاته غير متساوية الطول، فيدعى توزيعاً تكرارياً غير منتظم (انظر تمرين 12).

تمثيل التوزيعات التكرارية

1- المدرج التكراري: Frequency Histogram

وهو عبارة عن تمثيل كل فئة من فئات التوزيع بمستطيل حدود قاعدته الحدود الفعلية للفئات وارتفاعه يتناسب مع تكرار الفئة.

مثال: في المثال السابق، نمثل التوزيع بالمدرج التالي:

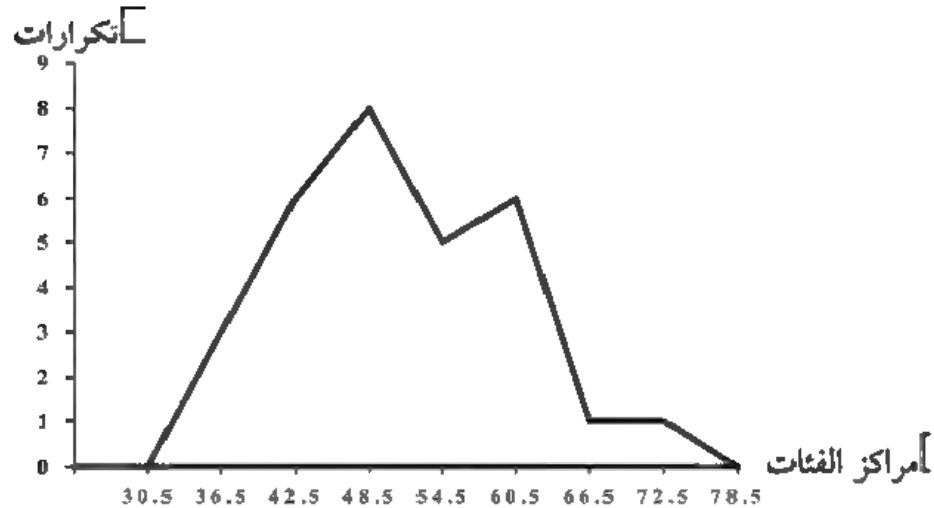


2- المضلع التكراري: Frequency Polygon

وهو مضلع مغلق نحصل عليه برسم محورين أفقي وعمودي ورصد نقاط مركز الفئة على المحور الأفقي وتكرار الفئة على المحور العمودي لتكون النقاط على الصورة (مركز الفئة، التكرار) لتمثل رؤوس المضلع ونصل بين هذه النقاط بخطوط مستقيمة، ولإغلاق المضلع نأخذ مركز الفئة السابق للفئة الأولى والتي يكون تكرارها صفراً ومركز الفئة اللاحقة للفئة الأخيرة والتي يكون أيضاً تكرارها صفراً.

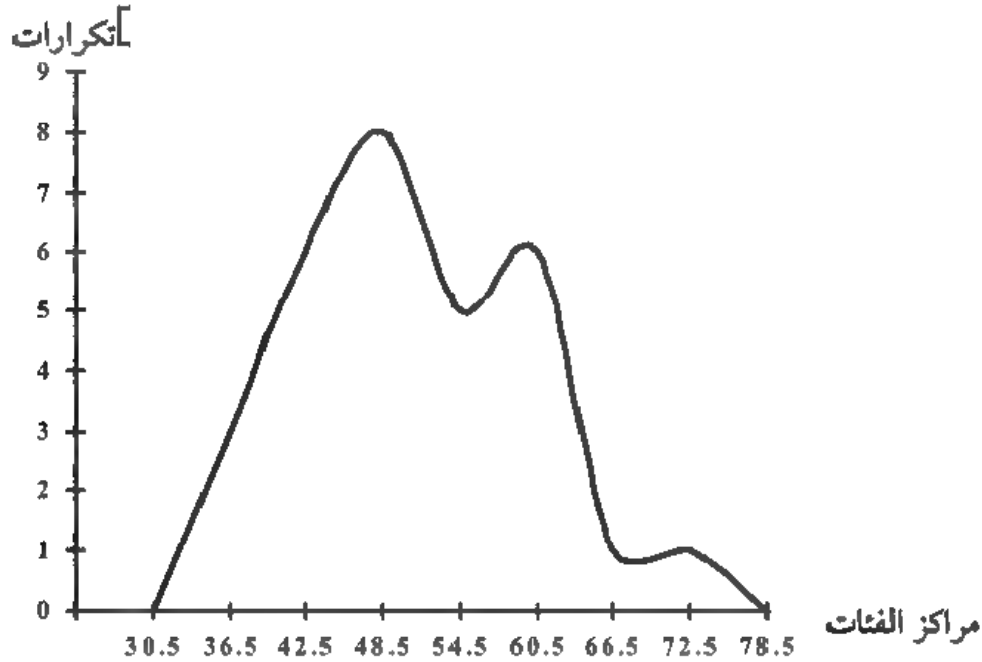
مثال:

في المثال السابق يكون التوزيع ممثلاً بالمضلع التكراري كما يلي:



3- المنحنى التكراري: Frequency Curve

إذا مهدنا المضلع التكراري وجعلناه منحنى بدلاً من خطوط مستقيمة فإننا نحصل على المنحنى التكراري.



ملاحظة: هنالك منحنى يشبه المنحنى التكراري ويرسم بنفس طريقة المنحنى التكراري ولكن النقط تكون الصورة (مركز الفئة، التكرار النسبي):

$$\text{حيث التكرار النسبي للفئة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

4- المنحنى التكراري التراكمي (المنحنى المتجمع الصاعد)

Cumulative Frequency Curve

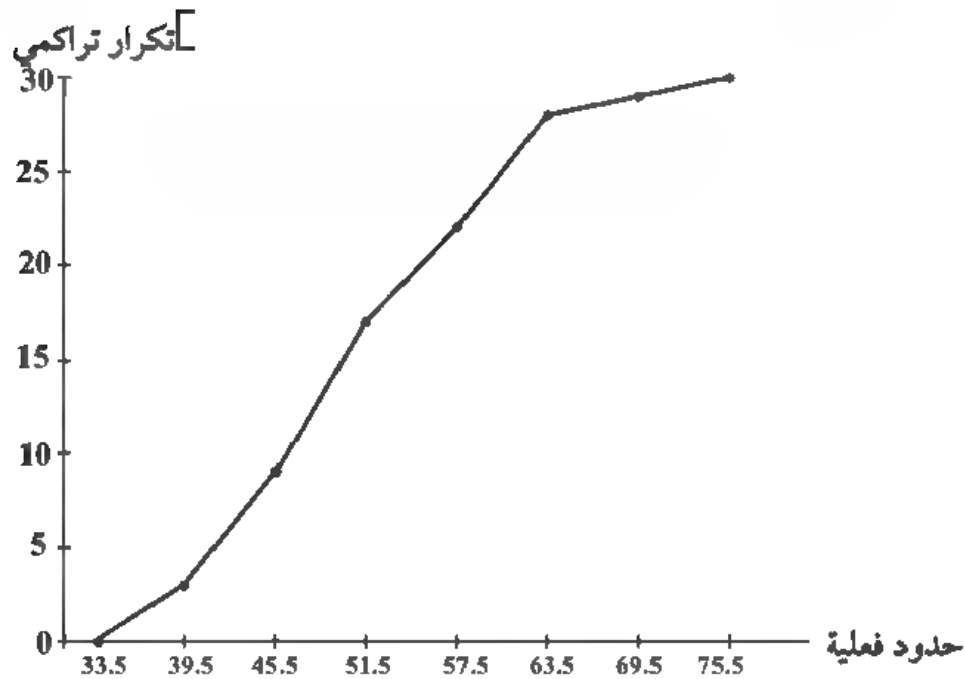
نحصل عليه برصد نقاط التكرار المتجمع على المحور العمودي مع الحد الأعلى الفعلي للفئات على المحور الأفقي.

والتكرار التراكمي للفئة: هو تكرار الفئة مضافاً إليه مجموع تكرارات الفئات التي تسبقها.

مثال:

في المثال السابق يكون المنحنى التكراري التراكمي للتوزيع هو المنحنى الناتج عن رسم الجدول التالي:

| الحدود الفعلية العليا Upper boundaries | التكرار التراكمي Cumulative Frequency |
|---|---|
| ≤ 33.5 | 0 |
| ≤ 39.5 | 3 |
| ≤ 45.5 | 9 |
| ≤ 51.5 | 17 |
| ≤ 57.5 | 22 |
| ≤ 63.5 | 28 |
| ≤ 69.5 | 29 |
| ≤ 75.5 | 30 |



الجداول المقفلة والجداول المفتوحة Closed and open tables

تعريف:

1- يسمى الجدول الذي تكون فته الأولى ليس لها حد أدنى جدولاً مفتوحاً من الأسفل.

2- ويسمى الجدول الذي تكون فته الأخيرة ليس لها حد أعلى جدولاً مفتوحاً من الأعلى.

3- تسمى الجداول المفتوحة من أسفل ومن أعلى جداول مفتوحة.

4- تسمى الجداول غير المفتوحة من أسفل وغير المفتوحة من أعلى جداول مقفلة (كما في شرحنا السابق) وهذه الجداول الأكثر أهمية وشيوعاً.

مثال:

حدد نوع الجدول فيما يلي من حيث كونه مفتوحاً من أسفل، مفتوحاً من أعلى، مفتوحاً، أو مقفلاً.

أ-

| الفئات Class | 50-59 | 60-69 | 70-79 | أكثر من 80 |
|----------------------|-------|-------|-------|------------|
| التكرار Frequency | 4 | 5 | 2 | 7 |

ب-

| الفئات Class | 10-14 | 14-19 | 20-24 | 25-29 |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|
| التكرار Frequency | 1 | 5 | 7 | 2 |

ج-

| الفئات Class | أقل من 35 | 35-39 | 40-44 | 45-49 |
|----------------------|-----------|-------|-------|-------|
| التكرار Frequency | 9 | 2 | 5 | 4 |

د-

| الفئات Class | أقل من 50 | 50-69 | 70-89 | أكثر من 90 |
|----------------------|-----------|-------|-------|------------|
| التكرار Frequency | 12 | 5 | 4 | 19 |

الحل:

أ. مفتوح من أعلى. ب. مقفل. ج. مفتوح من أسفل. د. مفتوح.

تمارين

- 1- إذا أجريت دراسة للبطالة على خريجي كليات المجتمع، فماذا يكون مجتمع الهدف ومجتمع العينة في هذه الدراسة.
- 2- أعط مثال على كل نوع من أنواع العينات.
- 3- اختار عينة عشوائية بسيطة حجمها (20) من مجتمع إحصائي حجمه (2500).
- 4- الجدول التالي يمثل أعداد الخريجين لكلية الهندسة في إحدى الجامعات في السنوات (2000-2004):

| السنة | عدد الخريجين |
|-------|--------------|
| 2000 | 100 |
| 2001 | 125 |
| 2002 | 150 |
| 2003 | 150 |
| 2004 | 175 |

مثل الجدول بالطرق التالية:

- أ- طريقة المستطيلات.
 - ب- طريقة الخط المنكسر.
 - ج- طريقة الدائرة.
 - د- طريقة الصور.
- 5- الجدول التالي يمثل مراكز الفئات وتكراراتها المقابلة:

| | | | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|----|----|
| xi | 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | 39 | 46 |
| fi | 3 | 6 | 10 | 15 | 9 | 5 | 2 |

- أ- كون جدول التوزيع التكراري لهذا الجدول.
- ب- مثل جدول التوزيع التكراري بالطرق التالية:
- المدرج التكراري.

- المضلع التكراري.
 - المنحنى التكراري النسبي.
 - المنحنى التكراري التراكمي.
- 6- المشاهدات التالية تمثل رواتب (40) موظفاً في دائرة حكومية:

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 117 | 200 | 137 | 145 | 113 | 117 | 115 | 110 |
| 225 | 230 | 113 | 145 | 115 | 225 | 250 | 113 |
| 185 | 180 | 175 | 113 | 200 | 113 | 250 | 117 |
| 137 | 148 | 248 | 237 | 245 | 240 | 195 | 190 |
| 219 | 213 | 209 | 173 | 167 | 195 | 194 | 188 |

كون جدول توزيع تكرار عدد فئاته عشرة فئات لهذه البيانات، ثم مثل هذه البيانات بالطرق التالية:

- أ- المنحنى التكراري.
- ب- المدرج التكراري.
- ج- المنحنى التكراري التراكمي.
- د- المنحنى التكراري النسبي.

7- قيست أقطار (20) كرة صغيرة بالسنتيمتر مقربة لأقرب خانة عشرية واحدة، فكانت القياسات:

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2.6 | 1.9 | 3.1 | 2.1 | 2.5 |
| 2.7 | 1.9 | 2.0 | 1.8 | 1.7 |
| 1.7 | 1.8 | 2.8 | 2.9 | 3.0 |
| 2.2 | 2.6 | 2.4 | 2.3 | 2.5 |

كون جدول توزيع تكراري عدد فئاته (5) ومثله بمدرج تكراري (إرشاد: الحد الفعلي الأدنى للفئة = الحد الأدنى - 0.05).

8- جدول توزيع تكراري طول فئة (9) أخذت منه فئة مركزها (38) أوجد الحدود الفعلية لتلك الفئة.

9- فئة من توزيع تكراري مركزها 16 وحدها الأدنى الفعلي (12.5) جد طول هذه الفئة.

10- ثلاثة مصانع A, B, C للألبسة إذا كان مجموع إنتاجها في عام 1997 هو (10000) قطعة، إذا مثل إنتاج هذه المصانع باستخدام طريقة القطاعات الدائرية، وكانت زاوية قطاع إنتاج المصنع (B) هي (162°) ، فما هو حجم إنتاج هذا المصنع في ذلك العام.

11- فئة تكرارها (8) وتكرارها النسبي 0.32 جد مجموع تكرارات جدول التوزيع التكراري الذي أخذت منه هذه الفئة.

12- مثل جدول التوزيع غير المنتظم التالي بمدرج تكراري.

| الفئات Class | 10-19 | 20-29 | 30-49 | 50-64 | د |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|---|
| التكرار Frequency | 5 | 10 | 16 | 14 | 5 |

13- مركز الفئة الثانية =

14- مركز الفئة الخامسة =

15- طول الفئة =



الوحدة الثانية

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

مقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

مقدمة

مقياس النزعة المركزية Measure of Central Tendency هو تلك القيمة التي نجدها من مجموعة البيانات (Data) التي لدينا والتي تمثل هذه البيانات بشكل مقبول. وهناك عدة مقاييس للنزعة المركزية منها الوسط الحسابي Mean والوسيط Median والمنوال Mode. ونفضل واحد منها على الآخر حسب البيانات التي لدينا. وقبل أن نبدأ بطرق إيجاد تلك المقاييس، سنتعرف على موضوع المئينات Percentiles والرتب المئينية والعشيرات Deciles والربيعات Quartiles أولاً وذلك من أجل التسلسل في العرض.

المئينات Percentiles

تعريف: المئين k هو تلك الملاحظة التي يقل عنها أو يساويها %k من المشاهدات. وسنرمز للمئين k بالرمز P_k .

فمثلاً: P_{60} هو الملاحظة التي يقل عنها أو يساويها 60% من المشاهدات، وطبعاً يزيد عنها 40% من المشاهدات.

مثال:

ما هي الملاحظة التي يزيد عنها $\frac{1}{4}$ المشاهدات.

الحل:

الملاحظة التي يزيد عنها $\frac{1}{4}$ المشاهدات هي تلك الملاحظة التي يقل عنها أو يساويها

$\frac{3}{4}$ المشاهدات. أي يقل عنها أو يساويها 75% من المشاهدات أي تلك الملاحظة هي P_{75} .

ولإيجاد المئينات Percentiles للجداول التكرارية سنتبع خطوات موضحة في المثال التالي.

مثال: إذا كان لدينا التوزيع التالي:

| Class | 10-14 | 15-19 | 20-24 | 25-29 | 30-34 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 1 | 5 | 8 | 4 | 2 | 20 |

أوجد: P_{50} .

الحل:

أولاً: نكتب الجدول التكراري التراكمي للتوزيع.

| Upper boundaries | Cumulative Frequency |
|-------------------------|----------------------|
| Less than or equal 14.5 | 1 |
| Less than or equal 19.5 | 6 |
| Less than or equal 24.5 | 14 |
| Less than or equal 29.5 | 18 |
| Less than or equal 34.5 | 20 |

ثانياً: التكرار التراكمي Cumulative Frequency للمئين 50:

$$C.F(P_{50}) = \frac{50}{100} \times \text{Total frequency}$$

$$C.F(P_{50}) = \frac{50}{100} \times 20$$

$$= 10$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن 10 تقع بين التكرارين التراكميين 6، 14 فيكون P_{50} واقعاً بين الحدين الفعلين 19.5 ، 24.5.



ثالثاً: بالنسبة والتناسب نجد قيمة P_{50}

$$P_{50} = 19.5 + \frac{4}{8} \times 5$$

$$= 22$$

ملاحظة: تسمى الفئة التي تحوي المئين k بالفئة المئينية لذلك المئين. ففي مثالنا السابق تكون الفئة المئينية للمئين 50 هي 19.5 – 24.5

| Class | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 7 | 13 | 30 | 19 | 11 | 80 |

أوجد: 1) P_{25} 2) P_{60} 3) P_{75}

الحل:

نحول الجدول إلى جدول تكراري تراكمي.

| Upper Boundaries | Cumulative Frequency |
|------------------|----------------------|
| Less than 19.5 | 7 |
| Less than 29.5 | 20 |
| Less than 39.5 | 50 |
| Less than 49.5 | 69 |
| Less than 59.5 | 80 |

1- نجد الترتيب التراكمي للمئين 25:

$$C.F(P_{25}) = \frac{25}{100} \times 80 = 20$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نرى أن هذه القيمة تقابل 29.5.

$$\therefore P_{25} = 29.5 \square$$

2- نجد الترتيب التراكمي للمئين 60:

$$C.F(P_{60}) = \frac{60}{100} \times 80 = 48$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن هذه القيمة تقع بين التكرارين

التراكميين 20، 50.

إذن P_{60} واقعاً بين 29.5 ، 39.5.

وبالنسبة والتناسب نجد P_{60} .



$$\begin{aligned} P_{60} &= 29.5 + \frac{28}{30} \times 10 \\ &= 29.5 + 9.3 \\ &= 38.8 \end{aligned}$$

3- نجد الترتيب التراكمي للمئين 75 :

$$C.F(P_{75}) = \frac{75}{100} \times 80 = 60$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن هذه القيمة واقعة بين التكرارين التراكميين 50، 69.



$$\begin{aligned} P_{75} &= 39.5 + \frac{10}{19} \times 10 \\ &= 39.5 + 5.26 \\ &= 44.76 \end{aligned}$$

تعريف: الرتبة المئينية Percentile Rank لمشاهدة ما هي النسبة المئوية للتكرار التراكمي المقابل لتلك المشاهدة بالنسبة إلى مجموع التكرارات.

ولإيجاد الرتبة المئينية تتبع خطوات نوضحها في المثال التالي:

مثال:

للجدول التكراري Frequency Distribution التالي

| Class | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 7 | 9 | 20 | 8 | 6 | 50 |

أوجد الرتبة المئينية

-b للمشاهدة 21

-a للمشاهدة 32

الحل:

-a

أولاً: نحول الجدول إلى جدول تكراري تراكمي

| Upper Boundaries | Cumulative Frequency |
|------------------|----------------------|
| Less than 24.5 | 7 |
| Less than 29.5 | 16 |
| Less than 34.5 | 36 |
| Less than 39.5 | 44 |
| Less than 44.5 | 50 |

ثانياً: نبحث عن موقع المشاهدة (Observation) 32 في الجدول التكراري التراكمي،
وضمن الحدود الفعلية للفئات وليس ضمن التكرارات التراكمية.

ف نجد أن هذه القيمة واقعة بين الحدين الفعليين 29.5 ، 34.5.

ثالثاً: وبطريقة النسبة والتناسب نجد التكرار التراكمي المقابل لتلك المشاهدة.



حيث التكرار التراكمي للمشاهدة (32)

$$\begin{aligned}
 C.F(32) &= 16 + \frac{2.5}{5} \times 20 \\
 &= 16 + 10 \\
 &= 26
 \end{aligned}$$

رابعاً: تكون الرتبة المئينية للمشاهدة 32: P.R(32)

$$\begin{aligned} P.R(32) &= \frac{C.F(32)}{\text{Total of frequency}} \times 100\% \\ &= \frac{26}{50} \times 100\% \\ &= 52\% \end{aligned}$$

b- نلاحظ هنا أن المشاهد (21) أقل (24.5) لذلك نضيف فئة سابقة حدها الفعلي الأعلى (19.5) ويكون التكرار التراكمي الذي أقل من أو يساوي 19.5 هو (Zero).



$$\begin{aligned} \therefore C.F(21) &= 7 \times \frac{1.5}{5} + 0 \\ &= 2.1 \\ \therefore P.R(21) &= \frac{2.1}{50} 100\% \\ &= 4.2\% \end{aligned}$$

مثال:

إذا كانت رواتب (60) عاملاً في مصنع ما موزعة كما في الجدول التالي:

| فئات الرواتب بالدينار | 80-89 | 90-99 | 100-109 | 110-119 | 120-129 | Total |
|-----------------------|-------|-------|---------|---------|---------|-------|
| التكرارات | 6 | 14 | 20 | 13 | 7 | 60 |

أوجد:

1. الرتبة المئينية للراتب 95.
2. الرتبة المئينية للراتب 109.5.
3. الرتبة المئينية للراتب 117.

الحل:

نحول الجدول إلى جدول تكراري تراكمي

| Upper Boundary | Cumulative Frequency |
|-----------------|----------------------|
| Less then 89.5 | 6 |
| Less then 99.5 | 20 |
| Less then 109.5 | 40 |
| Less then 119.5 | 53 |
| Less then 129.5 | 60 |

1. الراتب 95 يقع بين الحدين الفعليين 89.5 ، 99.5.

الآن بطريقة النسبة والتناسب نجد التكرار التراكمي المقابل للراتب 95



$$\begin{aligned}
 C.F(95) &= \frac{5.5}{10} \times 14 + 6 \\
 &= 7.7 + 6 \\
 &= 13.7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P.R(95) &= \frac{13.7}{60} \times 100\% \\
 &= 22.83\%
 \end{aligned}$$

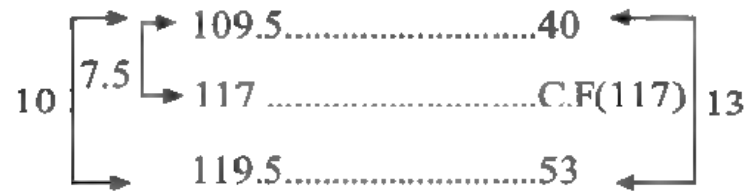
لاحظ أن النسبة 22.83% تعني أن 22.83 من العمال رواتبهم تقل عن أو تساوي 95 دينار.

2. ننظر للجدول التكراري التراكمي فنجد أن الراتب 109.5 يقابل تكرار تراكمي مقداره 40 لذا فإن

$$\begin{aligned} P.R (109.5) &= \frac{40}{60} \times 100\% \\ &= 66.67\% \end{aligned}$$

• سؤال: ماذا نعني بالنسبة 66.67%؟

3. بالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن الراتب 117 يقع بين الحدين الفعليين 109.5 ، 119.5 وبالنسبة والتناسب.



= نجد أن التكرار التراكمي المقابل للراتب 117

$$C.F (117) = 40 + \frac{7.5}{10} \times 13$$

$$= 40 + 9.75$$

$$= 49.75$$

$$P.R(117) = \frac{49.75}{60} \times 100\%$$

$$= 82.92\%$$

• سؤال: ماذا نعني بالنسبة 82.92%.

Finding Percentiles by using graphs إيجاد المئينات بيانياً

لتوضيح عملية إيجاد المئينات بيانياً لنأخذ المثال التالي:

مثال:

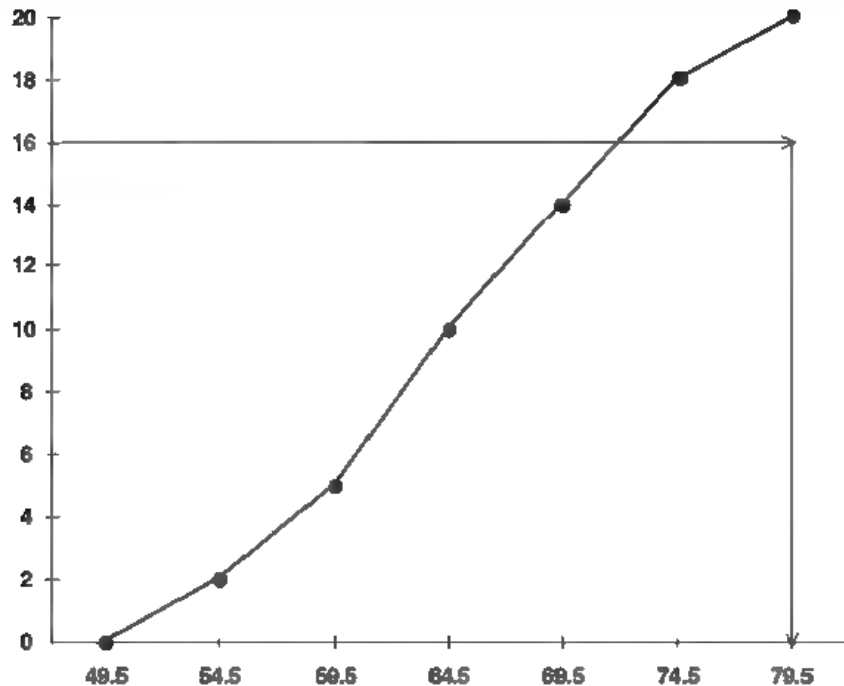
أوجد P_{80} للجدول التكراري التالي بيانياً.

| Class | 50-54 | 55-59 | 60-64 | 65-69 | 70-74 | 75-79 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 2 | 3 | 5 | 4 | 4 | 2 | 20 |

الحل:

أولاً: نرسم المنحنى التكراري التراكمي. بعد كتابة الجدول التكراري التراكمي:

| Upper boundary | Cumulative Frequency |
|----------------|----------------------|
| Less then 54.5 | 2 |
| Less then 59.5 | 5 |
| Less then 64.5 | 10 |
| Less then 69.5 | 14 |
| Less then 74.5 | 18 |
| Less then 79.5 | 20 |



لاحظ: عند رسم المنحنى التكراري التراكمي يكون التكرار التراكمي المقابل للحد الفعلي 49.5 مساوياً 0.

$$\text{ثانياً: } C.F(80) = \frac{80}{16} \times 20$$

$$- 16$$

ثالثاً: على المحور الرأسي Vertical axis وعند القيمة 16 نقيم عمود، فيقطع المنحنى التكراري التراكمي في نقطة ما، ومن تلك النقطة نسقط عمود على المحور الأفقي، فيقطع المحور الأفقي Horizontal axis عند القيمة 72 فتكون هذه القيمة هي المئين 80.

$$\therefore P_{80}=72.$$

لاحظ أن عملية إيجاد المئين بهذه الطريقة تعتمد على دقة الشخص في عملية الرسم لذلك فالجواب يكون تقريبياً.

العشيرات والربيعات Deciles and Quartiles

تعريف: العشير (decile) k هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{k}{10}$ من مجموع التكرارات. وسنرمز للعشير k بالرمز D_k .

فمثلاً العشير الثاني هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{2}{10}$ من مجموع التكرارات وهو نفس المئين P_{20} . (أي $D_2=P_{20}$)

كذلك العشير السادس هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{6}{10}$ من مجموع التكرارات وهو نفس المئين P_{60} . (أي $D_6=P_{60}$)

إذن فيمكننا القول أن العشير k هو المئين $10K$. ($D_k=P_{10k}$)

تعريف (Definition):

1 - الربع الأول (First Quartile): هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{1}{4}$ مجموع التكرارات وسنرمز له بالرمز Q_1 . ويسمى كذلك بالربع الأدنى. (Lower Quartile)

2- **الربيع الثاني (Second Quartile):** هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{2}{4}$ مجموع التكرارات وسنرمز له بالرمز Q_2 . ويسمى كذلك بالربيع الأوسط. Midle Quartile.

3- **الربيع الثالث (Third Quartile):** هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{3}{4}$ مجموع التكرارات وسنرمز له بالرمز Q_3 . ويسمى كذلك الربيع الأعلى (Upper Quartile).

لاحظ أن المشاهدة التي يقل عنها $\frac{1}{4}$ مجموع التكرارات هي نفس المشاهدة التي يقل عنها 25% من مجموع التكرارات أي أن:

$$Q_1=P_{25} \text{ وكذلك } Q_2=P_{50}, \text{ وأيضاً } Q_3=P_{75}$$

وبعد التعرف على العشيريات والربيعيات يمكننا القول أنه لحساب العشيريات والربيعيات نستخدم الطريقة المتبعة في حساب المئينات.

مقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

أولاً: **الوسط الحسابي Arithmetic Mean**

أ- في حالة المشاهدات المفردة:

تعريف: إذا كان لدينا المفردات x_1, x_2, \dots, x_n فيعرف الوسط الحسابي (\bar{x}) لهذه المفردات بالعلاقة

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

حيث n عدد المفردات

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

أو باستخدام رمز المجموع

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

وبشكل مختصر أكثر

مثال:

أوجد الوسط الحسابي للمفردات 3، 7، 6، 5، 9؟

الحل:

$$x = \frac{3 + 7 + 6 + 5 + 9}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{30}{5}$$

$$\bar{x} = 6$$

مثال:

إذا كان مجموع ما مع سبعة طلاب (105) دنانير، فما هو الوسط الحسابي لما ما مع هؤلاء الطلبة من الدنانير؟

$$\sum x = 105, \quad n = 7$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{105}{7} = 15$$

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي (Mean) لعلامات عدد من الطلاب هو (63)، وكان مجموع علاماتهم (1071). فما عدد هؤلاء الطلبة؟

الحل:

نفرض أن عدد هؤلاء الطلبة n فيكون

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\Rightarrow 63 = \frac{1071}{n}$$

$$\Rightarrow n = 17$$

ب- في حالة المشاهدات المتكررة: (Weighted mean) الوسط الموزون

تعريف: إذا كان لدينا x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من المشاهدات وكانت تكراراتهذه المشاهدات f_1, f_2, \dots, f_n فيعرف الوسط الحسابي لها بالعلاقة

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

أو بشكل مختصر $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ ويسمى هذا الوسط بالوسط المرجح (الموزون).

مثال:

إذا كانت علامات طالب في (10) مواد موزعة كما في الجدول التالي

| العلامة (x) | 60 | 70 | 85 | 90 | Total |
|----------------|----|----|----|----|-------|
| عدد المواد (f) | 2 | 3 | 4 | 1 | 10 |

احسب الوسط الحسابي لعلامات هذا الطالب؟

الحل:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum fx}{\sum f} \\ \bar{x} &= \frac{60 \times 2 + 70 \times 3 + 85 \times 4 + 90 \times 1}{10} \\ \bar{x} &= \frac{760}{10} \\ \bar{x} &= 76\end{aligned}$$

مثال:

إذا كان معدل رواتب عمال ثلاثة مصانع معطاة كالآتي:

| عدد العمال | معدل الرواتب | |
|------------|--------------|----------|
| 60 | 150 دينار | المصنع أ |
| 50 | 140 دينار | المصنع ب |
| 90 | 100 دينار | المصنع ج |

جد معدل رواتب العمال في المصانع الثلاثة معاً؟

الحل:

$$\bar{x} \text{ (معدل الرواتب)} = \frac{90 \times 100 + 50 \times 140 + 60 \times 150}{90 + 50 + 60}$$

$$= 125 \text{ J.D.}$$

ج- في حالة التوزيعات التكرارية Frequency distributions

في هذه الحالة سنجد الوسط الحسابي بطريقتين وهما

1- الطريقة العامة لإيجاد الوسط الحسابي

تعريف: إذا كان لدينا جدول تكراري فيه m من الفئات مراكزها (Class-marks) هي x_1, x_2, \dots, x_m وتكراراتها المقابلة f_1, f_2, \dots, f_m على الترتيب فنعرف الوسط الحسابي.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m f_i x_i}{\sum_{i=1}^m f_i}$$

أو بشكل مختصر $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ حيث x هي مركز الفئة

مثال:

أوجد الوسط الحسابي للجدول التكراري التالي:

| Class | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 9 | 17 | 20 | 9 | 5 | 60 |

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

حيث x : مركز الفئة f : تكرار الفئة

| class | f | Class mark(x) | xf |
|-------|----|---------------|------|
| 20-24 | 9 | 22 | 198 |
| 25-29 | 17 | 27 | 459 |
| 30-34 | 20 | 32 | 640 |
| 35-39 | 9 | 37 | 333 |
| 40-44 | 5 | 42 | 210 |
| Total | 60 | | 1840 |

$$\therefore \bar{x} = \frac{1840}{60}$$

$$x = 30.67$$

2- طريقة الوسط الفرضي Assumed mean

لو أخذنا الأعداد 21، 22، 23، 24، 25 وطلبنا منك أن تجد الوسط الحسابي لها. فيمكنك إيجادها بطريقة غير مباشرة وهي أن تطرح من كل عدد من هذه الأعداد (20) فتصبح الأعداد هي 1، 2، 3، 4، 5 على الترتيب ثم تجد لهذه الأرقام الوسط الحسابي وهو $3 = \frac{1+2+3+4+5}{5}$ ثم تضيف إلى هذه القيمة (20) فتصبح 23 وهو الوسط الحسابي للأعداد المطلوبة.

هذه الطريقة في إيجاد الوسط الحسابي تسمى طريقة الوسط الفرضي.

ويكون قانون الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي (A) للملاحظات المفردة

x_1, x_2, \dots, x_n هو .

$$x = A + \frac{\sum di}{n}$$

$$d_i = x_i - A$$

حيث

تمرين:

في المناقشة السابقة اطرح من كل مشاهدة العدد 15 ($A=15$) واتبع نفس الأسلوب المستخدم لتجد الوسط الحسابي للأعداد المطلوبة؟ ولاحظ هل يتغير الجواب؟

والآن لنكتب القانون المستخدم في حساب الوسط الحسابي للجداول التكرارية بطريقة الوسط الفرضي.

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

حيث: A الوسط الفرضي

$$d = x - A$$

أي أن d هي انحراف مركز الفئة عن الوسط الفرضي.

وبالنسبة لكيفية اختيار A فلا يوجد عليها أية قيود ولكن لتسهيل العمليات الحسابية نختار A مركز إحدى الفئات ذات الموقع المتوسط وتكرارها كبيراً نوعاً ما.

مثال:

أوجد الوسط الحسابي للجداول التكراري التالي بطريقة الوسط الفرضي.

| Class | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | 60-69 | 70-79 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 3 | 4 | 6 | 7 | 6 | 4 | 30 |

الحل:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

الآن نكتب الجدول التكراري بعد إيجاد مراكز فئاته. ولتكن A=54.5

| Class | f | D= X-A | fd |
|-------|----|--------|-----|
| 20-29 | 3 | -30 | -90 |
| 30-39 | 4 | -20 | -80 |
| 40-49 | 6 | -10 | -60 |
| 50-59 | 7 | 0 | 0 |
| 60-69 | 6 | 10 | 60 |
| 70-79 | 4 | 20 | 80 |
| Total | 30 | | -90 |

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 54.4 + \frac{-90}{30} \\ &= 54.5 - 3 \\ &= 51.5\end{aligned}$$

ملاحظة: لا تتغير قيمة الوسط الحسابي بتغير الوسط الفرضي.

تمرين:

احسب الوسط الحسابي للجدول التكراري في المثال السابق بالطريقة العامة؟

أهم خصائص الوسط الحسابي

1- الوسط الحسابي يتأثر بالعمليات الحسابية الأربع: فمثلاً إذا كان لدينا المفردات x_1, x_2, \dots, x_n وسطها الحسابي \bar{x} وعدلت هذه المفردات حسب العلاقة $y = ax + b$ ، حيث a, b عدنان حقيقيان، x المفردة قبل التعديل، y المفردة بعد التعديل، فإن $y = ax + b$ ، حيث y الوسط الحسابي للمفردات بعد التعديل.

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات 60 وعدلت جميع المفردات حسب العلاقة $y = 200 - 2x$. فأوجد الوسط الحسابي بعد التعديل؟

الحل: ليكن

الوسط الحسابي بعد التعديل \bar{y}

الوسط الحسابي قبل التعديل \bar{x}

فيكون $\bar{y} = 200 - 2\bar{x}$

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 200 - 2(60) \\ &= 200 - 120 \\ &= 80 \text{ (الوسط بعد التعديل)}\end{aligned}$$

2- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي (Zero).

فمثلاً إذا كان لدينا المفردات x_1, x_2, \dots, x_n وسطها الحسابي \bar{x} فإن $\sum (x - \bar{x}) = 0$
الحل:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1+4+7+5+3}{5} \\ &= \frac{20}{5} = 4 \\ \sum (x - \bar{x}) &= (1-4) + (4-4) + (7-4) + (5-4) + (3-4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

مثال:

إذا كانت الانحرافات 3 قيم عن وسطها الحسابي هي $a, 3, 2$ فأوجد قيمة a ؟

الحل:

$$2+3+a=0 \Rightarrow a=-5$$

3- الوسط الحسابي يتأثر بالقيم الشاذة المتطرفة

فمثلاً إذا كان لدينا ثلاثة أشخاص معهم بالدينار، 2، 4، 900 فيكون الوسط الحسابي لما مع هؤلاء الأشخاص هو $\frac{2+4+900}{3} = 302$ دينار وهذا لا يعطي صورة واقعية لما مع هؤلاء الأشخاص. لذلك نلجأ إلى مقاييس أخرى لا تتأثر بالقيم المتطرفة مثل الوسيط وغيره.

ثانياً: الوسيط Median

الوسيط (Me) هو مقياس آخر من مقاييس النزعة المركزية وهو المشاهدة التي يكون مجموع التكرارات التي تسبقها مساوياً لمجموع التكرارات التي تليها وبلغة المئينات يكون الوسيط هو المئين خمسين.

أي أن الوسيط = المئين 50 = العشير 5 = الربيع الثاني.

وإذا رمزنا للوسيط بالرمز Me فإن

$$Me = P_{50} = D_5 = Q_2$$

والآن لنأتي لطرق إيجاد الوسيط.

أ- في حالة المفردات

لإيجاد الوسيط في حالة المفردات والتي عددها n ، نرتب هذه المشاهدات تصاعدياً ويكون :

$$\left. \begin{array}{l} \text{المشاهدة التي ترتيبها } \frac{n+1}{2} \text{ إذا كان } n \text{ فردياً} \\ \text{الوسط الحسابي للمشاهدتين اللتين ترتيبهما } \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \text{ زوجياً} \end{array} \right\} = \text{الوسيط}$$

مثال:

أوجد الوسيط للمفردات 1, 7, 9, 16, 7, 10, 18

الحل:

نرتب المشاهدات تصاعدياً كما يلي: 1, 7, 7, 9, 10, 16, 18

لاحظ أن عدد المشاهدات $n=7$ ، أي أن الوسيط هو المشاهدة التي ترتيبها

$$\frac{7+1}{2} = 4$$

إذن فالوسيط هو المشاهدة الرابعة وهي $Me=9$.

مثال:

أوجد الوسيط للمفردات: 4, 5, 6, 9, 12, 16, 20

الحل: المشاهدات مرتبة تصاعدياً

$$n=8 \Leftrightarrow \text{الوسيط هو الوسط الحسابي للمشاهدتين } \frac{8}{2}, 1 + \frac{8}{2}$$

أي أن الوسيط هو الوسط الحسابي للمشاهدتين الرابعة والخامسة

$$Me = \frac{9 + 12}{2} = 10.5$$

ب- في حالة الجداول التكرارية

حساب الوسيط في الجداول التكرارية نحسب المثني 50

مثال: أوجد الوسيط للجدول التكراري التالي:

| Class | 10-14 | 15-19 | 20-24 | 25-29 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 4 | 8 | 5 | 3 | 20 |

الحل:

| Upper Boundary | Cumulative Frequency |
|----------------|----------------------|
| Less than 14.5 | 4 |
| Less than 19.5 | 12 |
| Less than 24.5 | 17 |
| Less than 29.5 | 20 |

$$\begin{aligned} C.F(Me) &= \frac{50}{100} \times 20 \\ &= 10 \end{aligned}$$

تقع بين 4، 12



$$\begin{aligned} Me &= 14.5 + \frac{6}{8} \times 5 \\ &= 14.5 + 3.75 \\ &= 18.25 \end{aligned}$$

• سؤال : أوجد الوسيط في المثال السابق بيانياً.

تعريف : الفئة التي تحوي الوسيط تسمى الفئة الوسيطة.

• سؤال : في المثال السابق أوجد الفئة الوسيطة؟

ثالثاً: المتوال Mode

المتوال (Mo) هو المقياس الثالث من مقاييس النزعة المركزية وهو المفردة (المشاهدة) الأكثر تكراراً.

أ- إيجاد المنوال في حالة المفردات

إذا كان لدينا مجموعة من المفردات فيكون منوالها هو المفردة الأكثر تكرارا.

مثال:

أوجد المنوال للمفردات 2, 7, 9, 5, 4, 2, 3

الحل:

$$Mo = 2$$

إذا وجد أكثر من مشاهدة لها نفس التكرار، ويزيد عن باقي تكرارات المشاهدات الأخرى فتكون هذه المشاهدات منوالا.

مثال:

أوجد المنوال للمفردات 1, 7, 9, 2, 10, 7, 5, 2, 9

الحل: يوجد ثلاثة منوالا هي 2, 7, 9

إذا كانت جميع المشاهدات لها نفس العدد من التكرارات فنقول أنه لا يوجد منوال.

مثال:

أوجد المنوال للمفردات 2, 10, 8, 16, 7

الحل:

لا يوجد منوال.

مثال:

أوجد المنوال للمفردات 7, 5, 9, 7, 9, 5, 5, 9, 7

الحل:

لا يوجد منوال.

ب- إيجاد المنوال للجداول التكرارية

المنوال للجداول التكرارية هو مركز الفئة التي تقابل أكبر تكرار، وتلك الفئة تسمى الفئة المنوالية.

مثال:

أوجد المنوال للجدول التكراري التالي:

| Class | 30-34 | 35-39 | 40-44 | 45-49 | 50-54 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 10 | 10 | 15 | 8 | 7 | 50 |

الحل:

الفئة المنوالية هي 40-44 فيكون

$$Mo = \frac{40 + 44}{2} = 42$$

مثال:

أوجد المنوال للجدول التكراري التالي:

| Class | 2-4 | 5-7 | 8-10 | 11-13 | 14-16 | Total |
|-----------|-----|-----|------|-------|-------|-------|
| Frequency | 2 | 9 | 3 | 9 | 7 | 30 |

الحل:

$$\frac{5+7}{2}, \frac{11+13}{2} \text{ يوجد منوالان هما } 6, 12$$

تعريف: التوزيعات التي لها منوال واحد تسمى أحادية المنوال، والتي لها منوالان تسمى ثنائية المنوال والتي لها أكثر من منوالين تسمى عديدة المنوال. أو متعددة المنوال.

العلاقة الخطية بين الوسط والوسيط والمنوال

في التوزيعات أحادية المنوال لوحظ أن هنالك علاقة خطية تربط مقاييس النزعة المركزية. مع التأكيد أن هذه العلاقة مبينة على التجربة والملاحظة. أي أن هذه العلاقة ليست دقيقة ولكنها تقريبية وهذه العلاقة هي:

$$(\text{Mean-Mode}) = 3(\text{Mean-Median})$$

$$(\bar{X} - Mo) = 3(\bar{X} - Me)$$

وبالرموز

أي أن بعد الوسط الحسابي عن المنوال ثلاثة أمثال بعده عن الوسيط.

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع أحادي المنوال يساوي 60 والمنوال 50 فأوجد تقدير الوسيط لهذا التوزيع؟

$$\begin{aligned}(\bar{X} - Mo) &= 3(\bar{X} - Me) \\(60 - 50) &= 3(60 - Me) \\10 &= 180 - 3 Me \\3Me &= 170 \\ \Rightarrow Me &= \frac{170}{3} \\ &= 56.7\end{aligned}$$

العزم والالتواء والتضطح Moments, Skewness and Kurtosis

تعريف: إذا كان لدينا المشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n

وكان a عدداً حقيقياً فإن العزم الرائي (r^{th} moment) حول العدد a

$$mr(a) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^r}{n} \quad r \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

العزم الرائي حول نقطة الأصل (the origin)

$$mr(o) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^r}{n}$$

العزم الرائي حول الوسط الحسابي (\bar{X}) هو:

$$mr(\bar{X}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r}{n}$$

تعريف:

إذا كان لدينا جدول تكراري مراكز فئاته x_1, x_2, \dots, x_n والتكرارات المقابلة

لتلك الفئات f_1, f_2, \dots, f_n على الترتيب فإن العزم الرائي حول العدد الحقيقي a

يعرف بالقانون:

$$mr(a) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

مثال:

المشاهدات 1, 2, 3, 4, 5

احسب

a) $m_1(0)$

b) $m_3(4)$

c) $m_2(\bar{X})$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{a) } M_1(0) &= \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i)^1}{5} \\ &= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3 \end{aligned}$$

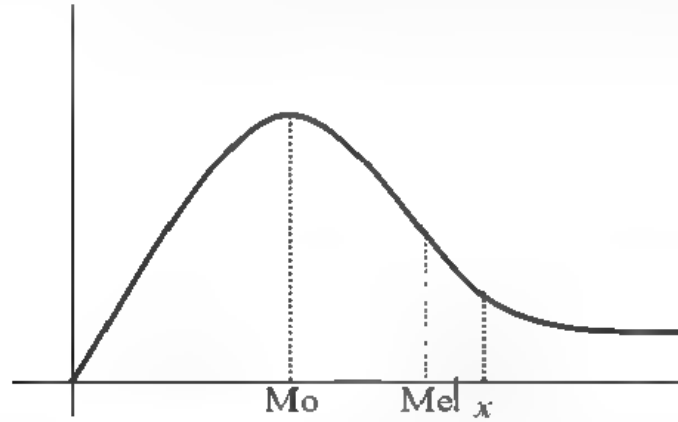
$$\begin{aligned} \text{b) } M_3(4) &= \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - 4)^3}{5} \\ M_3(4) &= \frac{(1 - 4)^3 + (2 - 4)^3 + (3 - 4)^3 + (4 - 4)^3 + (5 - 4)^3}{5} \\ M_3(4) &= \frac{-27 - 8 - 1 + 0 + 1}{5} \\ &= -7 \end{aligned}$$

c) $\bar{x} = 3$

$$\begin{aligned} M_2(\bar{X}) &= \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - 3)^2}{5} \\ &= \frac{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2}{5} \\ &= \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

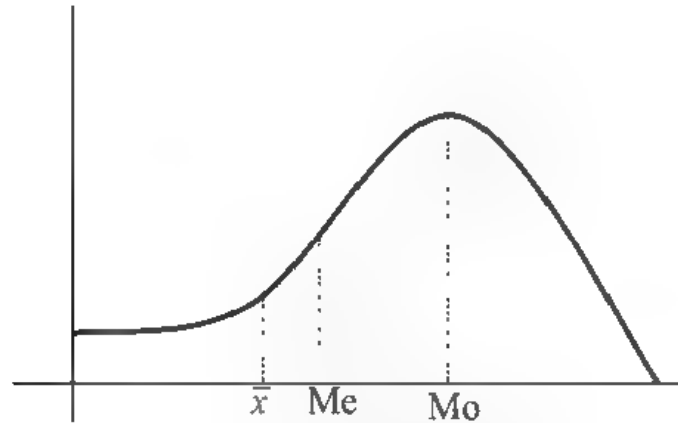
سنوضح الالتواء Skewness من خلال الأشكال الثلاثة التالية:

1- ملتوي نحو اليمين (موجب الالتواء) (Skewed to the right)



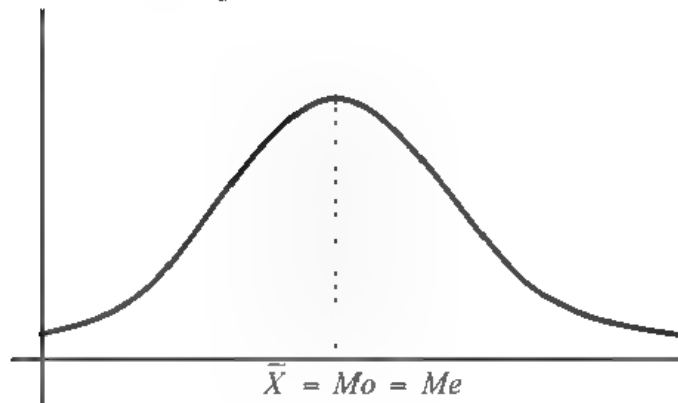
يكون المنوال \geq الوسيط \geq الوسط الحسابي

2- أما في التوزيعات الملتوية نحو اليسار (سالبة الالتواء) (Skewed to the left) كما في الشكل التالي:



يكون الوسط الحسابي \geq الوسيط \geq المنوال

3- وفي حالة التوزيعات المتماثلة كما في الشكل التالي:



أي أن الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
تعريف: يعرف مقياس الالتواء بالقانون التالي:

$$L_3 = \frac{m_3(\bar{x})}{\left(\sqrt{m_2(\bar{x})}\right)^3}$$

ويوجد مقاييس أخرى للالتواء منها

$$\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \text{معامل الالتواء الربيعي}$$

مثال:

للتداول التكراري التالي: احسب معامل الالتواء (L_3)

| | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Class | 10-14 | 15-19 | 20-24 | 25-29 | 30-34 |
| Frequency | 1 | 3 | 5 | 9 | 2 |

$$L_3 = \frac{m_3(\bar{x})}{\left(\sqrt{m_2(\bar{x})}\right)^3}$$

$$m_3(\bar{x}) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 f_i}{\sum f_i}$$

$$m_2(\bar{x}) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

□

| Class make (x_i) | Frequency f_i | $f x_i$ | $(x_i - \bar{x})$ | $(x_i - \bar{x})^3$ | $(x_i - \bar{x})^3 f_i$ |
|-------------------------|--------------------|---------|-------------------|---------------------|-------------------------|
| 12 | 1 | 12 | -12 | -1728 | -1728 |
| 17 | 3 | 51 | -7 | -343 | -1029 |
| 22 | 5 | 110 | -2 | -8 | -40 |
| 27 | 9 | 243 | 3 | 27 | 243 |
| 32 | 2 | 64 | 8 | 512 | 1024 |
| Total | 20 | 480 | | | -1530 |

$$\bar{X} = \frac{480}{20} = 24$$

$$m_3(\bar{x}) = \frac{-1530}{20}$$

$$= -76.5$$

| $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 f_i$ |
|---------------------|-------------------------|
| 144 | 144 |
| 49 | 147 |
| 4 | 20 |
| 9 | 81 |
| 64 | 128 |
| | 520 |

$$m_2(\bar{X}) = \frac{520}{20}$$

$$= 26$$

$$L_3 = \frac{-67.5}{(\sqrt{26})^3}$$

$$= -0.58$$

تمرين: ماذا تعني الإشارة السالبة في الجواب؟

أما التفرطح فسنوضحه من خلال الأشكال التالية:



معتدل التفرطح



قليل التفرطح (له قمة عالية)



كبير التفرطح

ومقياس التفرطح هو:

$$K_4 = \frac{m_4(\bar{x})}{(m_2(\bar{x}))^2}$$

تعمرين: في المثال السابق جد قيمة (K_4)

ملاحظة عامة:

جميع مقياس النزعة المركزية وهي الوسط الحسابي والوسيط والموال تتأثر بجميع العمليات الحسابية الأربع فإذا ضربت كل مشاهدة بالعدد الحقيقي a ثم أضيف العدد الحقيقي b فإن:

المقياس بعد التعديل $= a \times$ المقياس قبل التعديل $+ b$

فإذا رمزنا للمقياس قبل التعديل (m_x) ورمزنا للمقياس بعد التعديل (m_y)

فإن

$$m_y = am_x + b$$

مثال:

إذا كان الوسيط للمفردات x_1, x_2, \dots, x_n يساوي (50) جد الوسيط للمفردات

$$80 - x_1, 80 - x_2, \dots, 80 - x_n$$

الحل:

$$Me = 80 - 50$$

$$= 30 \quad (\text{بعد التعديل})$$

تمارين

1- إذا كان سعر السهم لشركة ما في سوق عمان المالي بالدينار على مدار أسبوع كما يلي: 5.5, 5.3, 5.2, 5.3, 5, 5.1, 5.1

فأوجد:

أ- الوسط الحسابي لسعر السهم في ذلك الأسبوع (\bar{x}).

ب- الوسيط (Me).

ج- المنوال (Mo).

2- إذا اخترنا عينة عشوائية من الأسر حجمها (10) وأخذ دخل كل أسرة بالدينار فكانت 150, 170, 200, 250, 130, 120, 130, 100, 110, 190

فأوجد:

أ- الوسط الحسابي لدخل الأسرة في هذه العينة.

ب- الوسيط.

ج- المنوال.

3- الجدول التالي يبين فئات أطوال 50 طالباً في إحدى المدارس الأساسية:

| Class | 100-109 | 110-119 | 120-129 | 130-139 | 140-149 | 150-159 | Total |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| Frequency | 1 | 2 | 7 | 20 | 15 | 5 | 50 |

أوجد :

أ- الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي

ب- الوسيط.

ج- المنوال

د- المئين 60.

هـ- الرتبة المئينية للطول 125.

و- جد الطول الذي يزيد عنه 35 طالباً وماذا نسمي هذا الطول؟

4- إذا كان عدد الطلاب المتقدمين لمادة مبادئ الإحصاء (20) طالباً وعدد الطالبات (30) طالبة. فإذا علمت أن الوسط الحسابي للطلاب (70) والوسط الحسابي للطالبات (75). فاحسب الوسط الحسابي لجميع الطلبة المتقدمين لهذه المادة؟

5- إذا كانت أعمار (40) شخصاً موزعة كما في الجدول التالي:

| Class | 20-24 | 25-29 | 30-34 | 35-39 | 40-44 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 6 | 8 | 10 | 9 | 7 | 40 |

فأوجد

أ- الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الأشخاص.

ب- الوسيط.

ج- المنوال.

د- العشير 7.

هـ- الربيع الأدنى.

و- الربيع الأعلى.

ز- العشير الرابع بيانياً.

6- إذا كان الوسط الحسابي لخمسين طالباً هو (70). فراجع المعلم طالبان فزادت علامة الأول بمقدار (10) ونقصت علامة الآخر بمقدار (5). احسب الوسط الحسابي لجميع الطلبة بعد عملية المراجعة؟

7- إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع أحادي المنوال هو 50 وكان المنوال هو (40). فأوجد الوسيط.

8- إذا كانت مبيعات أحد المتاجر لشهر نيسان من عام 1998. بمئات الدنانير هي:

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 4 | 7 | 5 | 9 | 12 | 17 |
| 6 | 16 | 11 | 18 | 7 | 19 |
| 12 | 10 | 14 | 20 | 8 | 13 |
| 4 | 20 | 13 | 14 | 11 | 6 |
| 9 | 8 | 19 | 18 | 13 | 15 |

أ- كوّن جدول توزيع تكراري بخمس فئات ومنه جد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

ب- جد المئين 80 لمبيعات هذا المتجر.

9- إذا كانت الأوساط الحسابية لعلامات مادة الإحصاء لثلاث شعب أ، ب، ج هي 70، 80، x على الترتيب وكانت أعداد هذه الشعب على التوالي 20، 30، 50، احسب قيمة (x) إذا علمت أن الوسط الحسابي المرجح لهذه الشعب هو 75.5؟

10- احسب مجموع علامات 50 طالباً الوسط الحسابي لعلاماتهم 85؟

11- إذا كانت المخافات خمس قيم عن وسطها الحسابي هي $3a, 4a, 2-a, 2a, a-8$ جد قيمة a؟

12- إذا كانت مجموع المخافات خمسون قيمة عن الوسط الفرضي (20) هو (70). فجد الوسط الحسابي لهذه القيم؟

13- مستشفى فيه ثلاثون ممرضا وعشرة أطباء. إذا كان معدّل رواتب الممرضين (200) ديناراً ومعدّل رواتب الأطباء (700) ديناراً وقررت إدارة المستشفى زيادة رواتب الأطباء عشرون ديناراً. وزيادة رواتب الممرضين 10٪ من رواتبهم احسب:

أ- معدّل رواتب الأطباء بعد الزيادة.

ب- معدّل رواتب الممرضين بعد الزيادة.

ج- معدّل رواتب الأطباء والممرضين معاً قبل وبعد الزيادة.

14- إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي (\bar{X}) فأثبت أن

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

15- إذا كان لدينا جدول تكراري فيه m من الفئات، مراكزها هي x_1, x_2, \dots, x_m والتكرارات المقابلة لكل فئة هي f_1, f_2, \dots, f_m على الترتيب فأثبت أن

$$\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}) f_i = 0$$

16- إذا كان لدينا x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من المشاهدات، وسطها الحسابي (\bar{X}) ، وعدلت هذه المشاهدات حسب العلاقة $y = ax + b$ حيث a, b عددان حقيقيان، x المشاهد قبل التعديل، y المشاهد بعد التعديل. فأثبت أن $y = ax + b$

17- إذا كان لدينا المشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n

بين أن:

$$m_1(0) = \bar{x}$$

18- للجدول الوارد في تمرين (5) جد ما يلي:

أ- $M_2(30)$

ب- $M_4(0)$

ج- L_3



الوحدة الثالثة

مقاييس التشتت

Measures of Dispersion



مقاييس التشتت

Measures of Dispersion

تستخدم مقاييس التشتت لإعطاء صورة عن مدى تقارب (تجانس) المشاهدات أو تباعدها (تشتتها) من بعضها البعض. فكلما زادت قيمة مقياس التشتت كلما ازداد تشتت المشاهدات وكلما قلت قيمته كلما زاد التجانس بين المشاهدات.

وجميع قيم مقاييس التشتت غير سالبة، ومن مقاييس التشتت المدى، نصف المدى الربيعي، الانحراف المتوسط، الانحراف المعياري.

أولاً: المدى Range

أ- للمشاهدات المفردة:

تعريف: المدى في حالة المفردات هو أكبر مشاهدة - أصغر مشاهدة والبعض يسميه المدى المطلق.

$$\text{Range} = \max. \text{ Observation} - \min. \text{ observation}$$

مثال:

أوجد المدى للمفردات 2, 9, 5, 4, 10, 16, 5, 4.

الحل:

$$\text{Range} = 16 - 2 = 14$$

ملاحظة: المدى يتأثر بالقيم الشاذة المتطرفة، فبعض الأحيان لا يعطي صورة حقيقية عن واقع المشاهدات لهذا السبب.

ب- للجداول التكرارية:

تعريف:

Range – Upper boundary of the last class – lower boundary of the first class

مثال:

أوجد المدى للجدول التكراري التالي:

| الفئات | 19-10 | 29-20 | 39-30 | 49-40 | 59-50 | المجموع |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| التكرارات | 5 | 10 | 20 | 15 | 10 | 60 |

الحل:

$$\begin{aligned} \text{Range} &= 59.5 - 9.5 \\ &= 50 \end{aligned}$$

ثانياً: نصف المدى الربيعي Semi-inter quartile range

$$\text{semi - inter quartile range} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

مثال:

أوجد نصف المدى الربيعي للجدول التالي:

| Class | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | Total |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 2 | 4 | 7 | 2 | 5 | 20 |

الحل: نحول الجدول التكراري إلى جدول تكراري تراكمي.

| Upper boundary | Cumulative frequency |
|----------------|----------------------|
| Less than 19.5 | 2 |
| Less than 29.5 | 6 |
| Less than 39.5 | 13 |
| Less than 49.5 | 15 |
| Less than 59.5 | 20 |

لإيجاد Q_3 :

$$\begin{aligned} \text{C.R} &= \frac{75}{100} \times 20 \\ &= 15 \end{aligned}$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن $Q_3 = 49.5$

لإيجاد Q_1 :

$$C.R = \frac{25}{100} \times 20$$

$$= 5$$

بالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن هذه القيمة تقع بين التكرارين

التراكميين 2، 6



$$Q_1 = 19.5 + \frac{3}{4} \times 10$$

$$= 19.5 + 7.5$$

$$= 27$$

$$\therefore \text{semi - interquartile range} = \frac{49.5 - 27}{2}$$

$$= 11.25$$

ملاحظة: البعض يستخدم المدى الربيعي كمقياس تشتت بدلا من نصف المدى الربيعي.

$$\text{Quartile Range} = Q_3 - Q_1 \quad \text{حيث}$$

ثالثاً: الانحراف المتوسط Mean deviation

أ- في حالة المفردات

تعريف: إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من المفردات وسطها الحسابي \bar{x}

فيعرف الانحراف المتوسط (Mean Deviation M.D) بالعلاقة التالية:

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

وبشكل مختصر

$$M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

مثال:

أوجد الانحراف المتوسط للمفردات 2, 4, 7, 5, 2.

الحل:

$$\bar{X} = \frac{2 + 4 + 7 + 5 + 2}{5}$$

$$\bar{X} = 4$$

$$\therefore M.D = \frac{|2 - 4| + |4 - 4| + |7 - 4| + |5 - 4| + |2 - 4|}{5}$$

$$= \frac{2 + 0 + 3 + 1 + 2}{5}$$

$$M.D = \frac{8}{5} = 1.6$$

ب- في حالة الجداول التكرارية

تعريف: إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مراكز فئات جدول تكراري عدد فئاته m . f_1, f_2, \dots, f_m التكرارات المقابلة لهذه الفئات على الترتيب فيعرف الانحراف المتوسط

لهذا الجدول بالعلاقة التالية:

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum_{i=1}^m f_i}$$

وبشكل مختصر

$$M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f}$$

ملاحظة: نفس القانون السابق يستخدم في حالة المفردات المتكررة. بحيث تمثل x قيمة المفردة بدلاً من مركز الفئة.

مثال:

أوجد الانحراف المتوسط للجدول التكراري التالي:

| class | 5-9 | 10-14 | 15-19 | 20-24 | 25-29 | Total |
|-----------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 3 | 2 | 5 | 6 | 4 | 20 |

الحل:

$$M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f}$$

| class | frequency | Class-mark (x) | xf | $ x - \bar{x} $ | $ x - \bar{x} f$ |
|-------|-----------|-------------------|-----|-----------------|-------------------|
| 5-9 | 3 | 7 | 21 | 11.5 | 34.5 |
| 10-14 | 2 | 12 | 24 | 6.5 | 13 |
| 15-19 | 5 | 17 | 85 | 1.5 | 7.5 |
| 20-24 | 6 | 22 | 132 | 3.5 | 21 |
| 25-29 | 4 | 27 | 108 | 8.5 | 34 |
| Total | 20 | | 370 | | 110 |

$$\bar{X} = \frac{370}{20}$$

$$= 18.5$$

$$M D = \frac{110}{20}$$

$$= 5.5$$

مثال:

أوجد الانحراف المتوسط للجدول التالي:

| | | | | | |
|-------------|---|---|---|----|----|
| Observation | 5 | 6 | 8 | 15 | 20 |
| frequency | 6 | 3 | 4 | 4 | 3 |

الحل:

| x | f | xf | $x - \bar{x}$ | $ x - \bar{x} f$ |
|-------|-----|------|---------------|------------------|
| 5 | 6 | 30 | 5 | 30 |
| 6 | 3 | 18 | 4 | 12 |
| 8 | 4 | 32 | 2 | 8 |
| 15 | 4 | 60 | 5 | 20 |
| 20 | 3 | 60 | 10 | 30 |
| Total | | 200 | | 100 |

$$\bar{X} = \frac{200}{20} = 10$$

$$M.D = \frac{100}{20} = 5$$

رابعاً: الانحراف المعياري (σ) Standard Deviation

أ- في حالة المفردات

تعريف: إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي \bar{x} فإن الانحراف المعياري لها (يرمز له بالرمز σ) يعطى بالعلاقة

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

ويسمى مربع الانحراف المعياري σ^2 بالتباين. (Variance)

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

مثال:

أوجد الانحراف المعياري والتباين للمفردات 1, 2, 3, 4, 5

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\bar{X} = \frac{1+2+3+4+5}{5}$$

$$= 3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4+1+0+1+4}{5}}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{2}$$

$$\sigma^2 = 2$$

مثال:

إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من المشاهدات فأثبت أن:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2}{n}}$$

بتوزيع المجموع على الحدود نحصل على

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2}{n}}$$

لكن

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}}$$

وهو المطلوب.

ملاحظة: بينا أن

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n}}$$

$$\rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

كذلك يمكننا كتابة الصيغة الأخيرة على الصورة

$$\sigma = \sqrt{x^2 - (\bar{x})^2}$$

يمكننا تلخيص ما سبق بأن قانون الانحراف المعياري يمكن كتابته على عدة صور منها:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$$

ولكن الأكثر استخداماً الشكّلين الأول والثالث.

تمرين:

أوجد الانحراف المعياري للمفردات 1, 2, 3, 4, 5 باستخدام الشكل الثاني لقانون الانحراف المعياري؟

مثال:

إذا كان لدينا سبع مشاهدات بحيث أن $\sum_{i=1}^7 x_i = 28$ ، $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$ فأوجد

الانحراف المعياري لهذه المشاهدات؟

الحل:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^7 x_i^2}{7} - \left(\frac{\sum_{i=1}^7 x_i}{7}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{140}{7} - \left(\frac{28}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{20 - 16}$$

$$= 2$$

ب - في حالة الجداول التكرارية

ستعرض لطريقتين في حساب الانحراف المعياري للجداول التكرارية إلا وهما الطريقة العامة وطريقة الوسط الفرضي. وكذلك تستخدم الطريقتين في حساب الانحراف المعياري للمفردات المتكررة. باستخدام نفس القوانين.

1- الطريقة العامة لحساب الانحراف المعياري General method

تعريف: إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مراكز فئات جدول تكراري وكانت تكرارات فئاته f_1, f_2, \dots, f_m على الترتيب فإن

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum_{i=1}^m f_i}}$$

الصيغة الواردة في التعريف السابق للانحراف المعياري تؤدي إلى صعوبة في العمليات الحسابية وخاصة إذا كان الوسط الحسابي عدد غير صحيح. لذلك نستخدم الصيغة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^m f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^m x_i f_i}{\sum_{i=1}^m f_i} \right)^2}$$

تمرين:

أثبت أن الصيغتين السابقتين للانحراف المعياري في حالة الجداول التكرارية متكافئتين؟
يمكن كتابة الصيغة الثانية للانحراف المعياري في حالة الجداول التكرارية بالصورة

$$\sigma = \sqrt{x^2 - (\bar{x})^2}$$

مثال:

أوجد التباين (Variance) للجدول التكراري التالي؟

| | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Class | 10-14 | 15-19 | 20-24 | 25-29 | 30-34 | Total |
| Frequency | 1 | 2 | 6 | 7 | 4 | 20 |

الحل:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum x f}{\sum f} \right)^2$$

| Class | frequency | Class-mark(x) | xf | X ² | X ² f |
|-------|-----------|---------------|-----|----------------|------------------|
| 10-14 | 1 | 12 | 12 | 144 | 144 |
| 15-19 | 2 | 17 | 34 | 289 | 578 |
| 20-24 | 6 | 22 | 132 | 484 | 2904 |
| 25-29 | 7 | 27 | 189 | 729 | 5103 |
| 30-34 | 4 | 32 | 128 | 1024 | 4096 |
| Total | 20 | | 495 | | 12825 |

$$\sigma^2 = \frac{12825}{20} - \left(\frac{495}{20} \right)^2$$

$$= 641.25 - 612.5626$$

$$\text{Variance } (\sigma^2) = 28.6875$$

ويمكننا تبسيط الإجراءات الحسابية باستخدام طريقة الوسط الفرضي التالية:

2- طريقة الوسط الفرضي Assumed-mean method

إذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات وأضفنا لها أو طرحنا منها مقداراً ثابتاً فإن ذلك لا يؤثر على تباعد القيم عن بعضها البعض. وذلك هو المبدأ الذي نستخدمه في حساب الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي.

إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_m مراكز فئات جدول تكراري، بحيث أن التكرارات المقابلة للفئات هي f_1, f_2, \dots, f_m على الترتيب فإن قانون الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي هو

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m d_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^m f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^m d_i f_i}{\sum_{i=1}^m f_i} \right)^2}$$

$$d_i = x_i - A \text{ حيث}$$

A: assumed-mean (الوسط الفرضي)

والوسط الفرضي نختاره مركز فئة متوسطة الموقع في الجدول ويكون تكرارها كبير نوعاً ما.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum df}{\sum f} - \left(\frac{\sum df}{\sum f}\right)^2}$$

وبشكل أكثر اختصاراً

مثال:

أوجد الانحراف المعياري للجدول التكراري التالي بطريقة الوسط الفرضي.

| | | | | | | |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Class | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | 50-59 | Total |
| Frequency | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 10 |

الحل:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2 f}{\sum d} - \left(\frac{\sum df}{\sum d}\right)^2}$$

| class | frequency | class mark (x) | d=x-34.5 | df | d ² | d ² f |
|-------|-----------|----------------|----------|-----|----------------|------------------|
| 10-19 | 1 | 14.5 | -20 | -20 | 400 | 400 |
| 20-29 | 2 | 24.5 | -10 | -20 | 100 | 200 |
| 30-39 | 3 | 34.5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 40-49 | 3 | 44.5 | 10 | 30 | 100 | 300 |
| 50-59 | 1 | 54.5 | 20 | 20 | 400 | 400 |
| Total | 10 | | | 10 | | 1300 |

لاحظ أننا اعتبرنا A = 34.5

$$\begin{aligned}\therefore \sigma &= \sqrt{\frac{1300}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2} \\ &= \sqrt{130 - 1} \\ &= \sqrt{129} \\ &= 11.36\end{aligned}$$

معامل الاختلاف Coefficient of Variation

يعرف معامل الاختلاف بأنه النسبة المئوية بين الانحراف المعياري والوسط الحسابي ويرمز له بالرمز CV، حيث

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 \%$$

مثال:

إذا كان الانحراف المعياري لتوزيع ما (5.33) والوسط الحسابي (24.75) احسب معامل الاختلاف لهذا التوزيع؟

الحل:

$$\begin{aligned}C.V &= \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 \% \\ &= \frac{5.35}{24.75} \times 100 \% \\ &= 21.61 \%\end{aligned}$$

ويستخدم معامل الاختلاف للمقارنة بين مجموعتين فكلما كان معامل الاختلاف أقل كان تجانس القيم أكثر.

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لإنتاج مصنعين لمدة عشرة سنوات كما يلي:

المصنع A: $\bar{X} = 30,8 = 8$

المصنع B: $\bar{X} = 60,8 = 12$

أي المصنعين إنتاجه أفضل.

الحل:

$$C.V_A = \frac{8}{30} \times 100\% = 26.67\%$$

$$C.V_B = \frac{12}{60} \times 100\% = 20\%$$

بما أن معامل الاختلاف للمصنع الثاني أقل من المصنع الأول فإن إنتاج المصنع الثاني أفضل لأنه أكثر تجانساً.

تمرين:

أعد حل المثال السابق باستخدام الطريقة العامة؟

ملاحظة عامة:

جميع مقاييس التشتت لا تتأثر بإضافة ثابت حقيقي لجميع الأفراد. ولكنها تتأثر بضرب جميع الأفراد بثابت حقيقي. (انظر تمرين 5).

تمارين

1- للمفردات التالية: 1, 4, -1, 0, 6

أوجد:

1. المدى range؟

2. الانحراف المتوسط mean-deviation؟

3. الانحراف المعياري standard deviation؟

4. التباين variance؟

2- أعد حل السؤال السابق للمفردات: 1, 1, 18, 16, 15, 20, 17, 5, 2, 12, 7, 1

9, 7, 3, 4

3- للجدول التكراري التالي:

| Class | -10-(-1) | 0-9 | 10-19 | 20-29 | 30-39 | 40-49 | Total |
|-----------|----------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| Frequency | 5 | 7 | 9 | 8 | 10 | 1 | 40 |

أوجد:

1. المدى range؟

2. نصف المدى الربيعي semi interquartile range؟

3. الانحراف المتوسط Mean deviation؟

4. التباين variance؟

4- في السؤال السابق أوجد المدى العشري للتوزيع حيث:

المدى العشري = العشر التاسع - العشر الأول

$$\text{Decile range} = D_9 - D_1$$

5- إذا كان لدينا المفردات x_1, x_2, \dots, x_n وعدلت هذه المفردات حسب العلاقة $y =$

$ax + b$ ، حيث a, b عددا حقيقيان. x المفردة قبل التعديل y المفردة بعد التعديل

فأثبت أن:

- ١- الانحراف المتوسط بعد التعديل $= |a| \times$ الانحراف المتوسط قبل التعديل.
- ب- الانحراف المعياري بعد التعديل $= |a| \times$ الانحراف المعياري قبل التعديل.
- 6- إذا كان لدينا مجموعة من المفردات، انحرافها المعياري 5، وعدلت جميع المفردات حسب العلاقة $y = 6 - 2x$ فأوجد:
- أ- الانحراف المعياري بعد التعديل؟
- ب- التباين قبل التعديل؟
- ج- التباين بعد التعديل وما علاقته بالتباين قبل التعديل؟
- 7- إذا كان الانحراف المعياري لعشرة مشاهدات هو (5). أوجد مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي؟
- 8- إذا كان التباين للقيم 1, 5, k, -4 هو (11.5). أوجد الوسط الحسابي وقيمة k؟ (كم حلا للسؤال؟).
- 9- إذا كان مجموع مربعات مئة قيمة هو (1500). ومجموع هذه القيم (300)، جد تباين هذه القيم؟
- 10- إذا كانت انحرافات ستة قيم عن وسطها الحسابي هي 0, -6, 7, -2, 5, -4. جد الانحراف المعياري لهذه القيم؟ وكذلك الانحراف المتوسط؟
- 11- إذا كان الانحراف المعياري والوسط الحسابي لرواتب مجموعة موظفين في شركة بالدينار (12)، (180) على الترتيب. فإذا قرر مدير الشركة زيادة الرواتب بمقدار عشرة دنانير لكل موظف. احسب الانحراف المعياري والوسط الحسابي للرواتب بعد التعديل؟
- 12- للجدول التكراري التالي

| Class | 100-119 | 120-139 | 140-159 | 160-179 | 180-199 | Total |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| Frequency | 17 | 13 | 24 | 15 | 11 | 80 |

احسب:

- أ- الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.
- ب- الانحراف المعياري بطريقة الوسط الفرضي.
- ج- المدى الربيعي.
- د- المدى العشيري.

13- إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من القيم وكان $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 272$

والانحراف المعياري لهذه القيم (4) جد n؟

14- إذا كان نصف المدى الربيعي لمجموعة من القيم (7.5) والمتين 75 لها (23) جد الربع الأول لهذه المشاهدات؟

15- إذا كان مجموع مربعات (65) قيمة هي (4875) وانحرافها المعياري $\sqrt{11}$. احسب الوسط الحسابي لهذه القيم؟

16- للمفردات x_1, x_2, \dots, x_n بين أن:

أ- $\sigma^2 = m_2(\bar{x})$

ب- $L_3 = \frac{m_2(\bar{x})}{\sigma^2}$

4

الوحدة الرابعة

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

الارتباط والانحدار Correlation and Regression

المقدمة

الارتباط: هو قوة العلاقة بين متغيرين أو أكثر. ولكن سيقصر تعاملنا في هذا الكتاب على متغيرين فقط.

جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط Scatter Tables

الانتشار هو التمثيل البياني للعلاقة بين المتغيرين ويكون ذلك برصد نقاط المتغيرين على المحورين الأفقي والعمودي.

ومن خلال لوحة الانتشار يمكن تحديد مدى قوة العلاقة بين المتغيرين سواء كانت هذه العلاقة طردية (إيجابية) أو عكسية (سلبية).

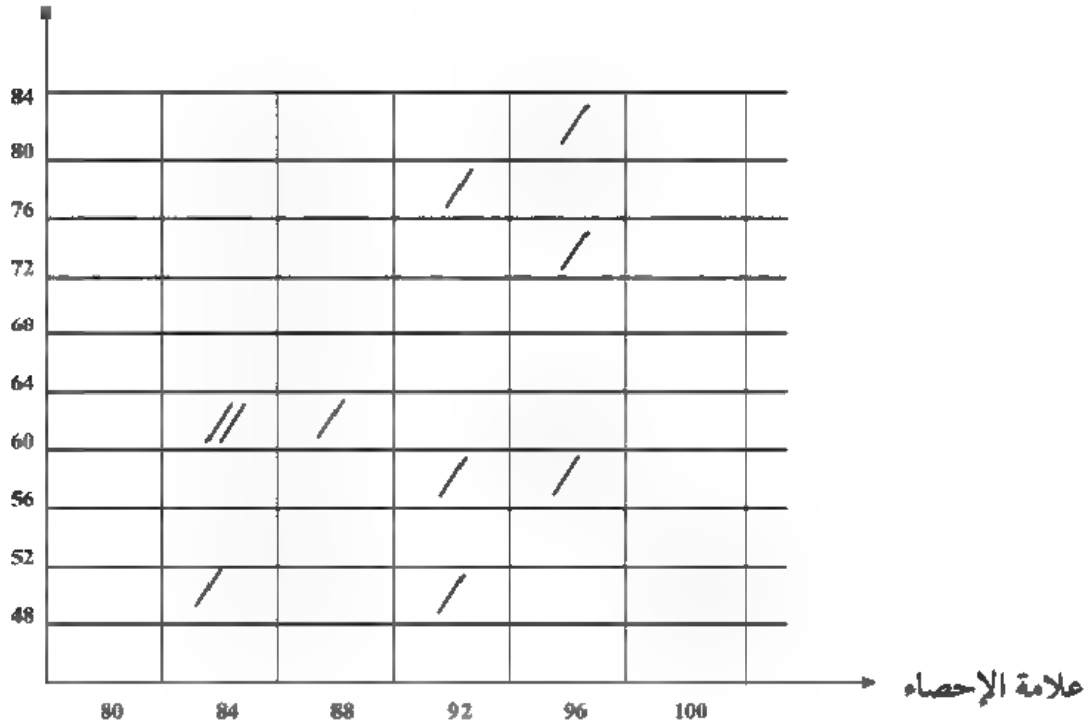
مثال:

في دراسة أجريت لقياس مدى العلاقة بين التحصيل في مادة الإحصاء ومادة الاقتصاد، أجري امتحان في المادتين لعشرة طلاب وكانت النتائج كما يلي:

| الاقتصاد | الإحصاء |
|----------|---------|
| 61 | 80 |
| 58 | 95 |
| 74 | 94 |
| 58 | 89 |
| 81 | 92 |
| 49 | 83 |
| 77 | 91 |
| 50 | 88 |
| 63 | 80 |
| 61 | 85 |

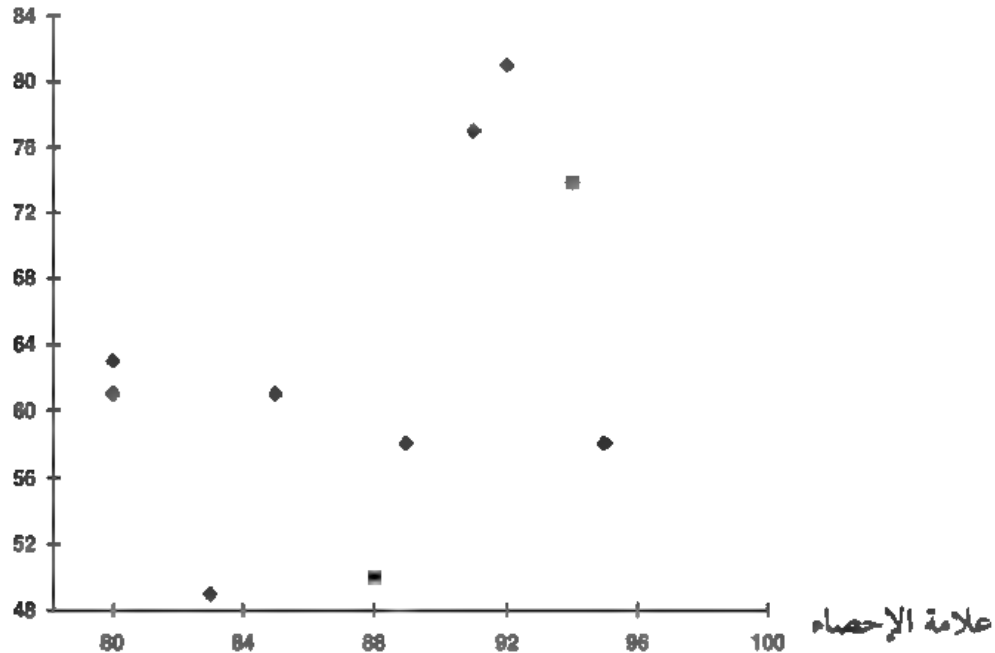
كون جدول الانتشار ولوحة الانتشار وبين فيما إذا كانت العلاقة قوية أم ضعيفة وإذا كانت سالبة أم موجبة.

علامة الاقتصاد



جدول الانتشار

علامة الاقتصاد



نرى من خلال لوحة الانتشار وجدول الانتشار أن الارتباط موجب ولكنه ضعيف نوعاً ما ولكن إذا أردنا معرفة قوة العلاقة الحقيقية بين المتغيرين فإن أفضل مقياس هو معامل الارتباط والذي سنتحدث عنه في البند اللاحق.

معامل الارتباط Correlation Coefficient

وهو المقياس الرقمي لقوة الارتباط بين متغيرين.

خصائص معامل الارتباط Properties of correlation coefficient

- 1- تتراوح قيمة معامل الارتباط (r) بين -1 و 1 .
أي $-1 \leq r \leq 1$
 - 2- إذا كانت r بين 0 و 1 فإن العلاقة بين المتغيرين تكون علاقة موجبة أو طردية أما إذا كانت r بين -1 و 0 تكون العلاقة عكسية أو سالبة.
 - 3- إذا كانت $r = 1$ فإن العلاقة تكون موجبة تامة. وإذا كانت $r = -1$ فإن العلاقة سالبة تامة.
 - 4- إذا كانت $r = 0$ فإنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين.
 - 5- تزداد قوة العلاقة كلما اقتربنا من (1) و (-1) وتقل كلما اقتربنا من 0.
- وهناك عدة أنواع من معاملات الارتباط ولكن ستقتصر دراستنا في هذا الكتاب على معاملي ارتباط بيرسون وسبيرمان.

1- معامل ارتباط بيرسون Persons Correlation Coefficient: ويسمى

معامل ارتباط العزوم. يعد من أفضل معاملات الارتباط وأكثرها شيوعاً.

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

فإن معامل ارتباط بيرسون هو:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n S_x S_y}$$

حيث:

\bar{x} = الوسط الحسابي لملاحظات المتغير x .

\bar{y} = الوسط الحسابي لملاحظات المتغير y .

σ_x = الانحراف المعياري للمتغير x .

σ_y = الانحراف المعياري للمتغير y .

مثال:

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين قيم x, y من البيانات التالية وبين فيما إذا كانت العلاقة طردية أم عكسية، ضعيفة أم قوية.

| | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | 150 | 162 | 180 | 160 | 170 | 180 |
| Y | 200 | 250 | 300 | 200 | 240 | 280 |

الحل:

| x_i | y_i | $x_i - \bar{x}$ | $y_i - \bar{y}$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(y_i - \bar{y})^2$ |
|-------|-------|-----------------|-----------------|----------------------------------|---------------------|---------------------|
| 150 | 200 | -17 | -45 | 765 | 289 | 2025 |
| 162 | 250 | -5 | 5 | -25 | 25 | 25 |
| 180 | 300 | 13 | 55 | 715 | 169 | 3025 |
| 160 | 200 | -7 | -45 | 315 | 49 | 2025 |
| 170 | 240 | 3 | -5 | -15 | 9 | 25 |
| 180 | 280 | 13 | 35 | 455 | 169 | 1225 |
| 1002 | 1470 | | | 2210 | 710 | 8350 |

نجد أولاً : $\bar{x} = 167$, $\bar{y} = 245$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{710}{6}} = 10.88$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{8350}{6}} = 37.31$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{2210}{6 * 10.88 * 37.31} = 0.907$$

وهذا يدل على أن العلاقة طردية قوية.

وهناك أشكال أخرى لمعادلة إيجاد معامل ارتباط بيرسون منها.

$$r = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2}}$$

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}}$$

مثال:

احسب معامل ارتباط بيرسون بين علامات عشرة طلاب في مساق الرياضيات والإحصاء من الجدول التالي:

| | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 80 | 60 | 55 | 40 | 75 | 85 | 70 | 60 | 80 | 90 |
| y | 75 | 65 | 60 | 50 | 70 | 90 | 70 | 55 | 80 | 85 |

الحل:

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}} \quad \text{ستستخدم القانون}$$

| الرياضيات (x) | الإحصاء (y) | xy | x ² | y ² |
|------------------|----------------|-------|----------------|----------------|
| 80 | 75 | 6000 | 6400 | 5625 |
| 60 | 65 | 3900 | 3600 | 4225 |
| 55 | 60 | 3300 | 3025 | 3600 |
| 40 | 50 | 2000 | 1600 | 2500 |
| 75 | 70 | 5250 | 5625 | 4900 |
| 85 | 90 | 7650 | 7225 | 8100 |
| 70 | 70 | 4900 | 4900 | 4900 |
| 60 | 55 | 3300 | 3600 | 3025 |
| 80 | 80 | 6400 | 6400 | 6400 |
| 90 | 85 | 7650 | 8100 | 7225 |
| 695 | 700 | 50350 | 50475 | 50500 |

$$\bar{x} = 69.5$$

$$\bar{y} = 70$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}} \\ &= \frac{50350 - 10 * 69.5 * 70}{\sqrt{50475 - 10(69.5)^2} \sqrt{50500 - 10(70)^2}} \\ &= \frac{1700}{\sqrt{2172.5} \sqrt{1500}} = \frac{1700}{1805.2} = 0.942 \end{aligned}$$

الارتباط (طردي قوي)

2- معامل ارتباط سبيرمان Sparman Correlation Coefficient:

ويسمى معامل ارتباط الرتب

يستخدم إذا كان هناك صعوبة في استخدام معامل ارتباط بيرسون أو لم يتوفر لدينا القيم الحقيقية للملاحظات ولكن توفرت رتبها فقط ويكون:

$$r = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث d_i : فروق بين رتب المتغيرين x, y .

$$d_i = O_x - O_y \quad \text{أي}$$

O_x : حيث رتبة x

O_y : رتبة y

وبشكل مختصر

$$r = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

ولإيجاد الرتب نجد رتب كل متغير على حده فمثلاً لإيجاد رتب المتغير x نعطي أكبر مشاهدة الرتبة (1) والتي تليها الرتبة (2) وهكذا. أما إذا تساوت أكثر من قيمة نعطي كل قيمة معدل رتب هذه القيم.

مثال:

أوجد معامل ارتباط الرتب للجدول التالي والذي يمثل رتب عشرة طلاب في موضوعين دراسيين. (x, y).

| | | | | | | | | | | |
|----|---|---|----|---|----|---|---|---|---|---|
| Ox | 6 | 7 | 10 | 8 | 9 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 |
| Oy | 8 | 5 | 9 | 7 | 10 | 2 | 6 | 4 | 1 | 3 |

الحل:

$$r = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

| O _x | O _y | d _i | d _i ² |
|----------------|----------------|----------------|-----------------------------|
| 6 | 8 | -2 | 4 |
| 7 | 5 | 2 | 4 |
| 10 | 9 | 1 | 1 |
| 8 | 7 | 1 | 1 |
| 9 | 10 | -1 | 1 |
| 1 | 2 | -1 | 1 |
| 2 | 6 | -4 | 16 |
| 5 | 4 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 3 | 1 | 1 |
| | | | 34 |

$$r = 1 - \frac{6 * 34}{(10)((10)^2 - 1)} = 1 - \frac{204}{990} = 0.794 \quad (\text{طردية قوية})$$

مثال:

أوجد معامل ارتباط سبيرمان للجدول التالي والذي يمثل تكاليف الدعاية لنوع من البضائع وقيمة المبيعات بمئات الدنانير:

| | | | | | | | | | |
|-------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| تكاليف الدعاية (X) □ | 8 | 10 | 6 | 4 | 12 | 13 | 5 | 11 | 9 |
| المبيعات (Y) □ | 150 | 160 | 150 | 130 | 165 | 180 | 120 | 160 | 150 |

الحل:

$$r = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

| تكاليف الدعاية (X) | المبيعات (y) | O _x | O _y | d _i | di ² |
|-----------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| 8 | 150 | 6 | 6 | 0 | 0 |
| 10 | 160 | 4 | 3.5 | 0.5 | 0.25 |
| 6 | 150 | 7 | 6 | 1 | 1 |
| 4 | 130 | 9 | 8 | 1 | 1 |
| 12 | 165 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 13 | 180 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 120 | 8 | 9 | -1 | 1 |
| 11 | 160 | 3 | 3.5 | -0.5 | 0.25 |
| 9 | 150 | 5 | 6 | -1 | 1 |
| | | | | | 4.5 |

$$r = 1 - \frac{6 * 4.5}{9(9^2 - 1)}$$

$$= 1 - 0.0375$$

$$= 0.9625 \square$$

أثر التحويلات الخطية على معامل الارتباط:

إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين x, y ، وأجرينا تعديلاً على كل من قيم x, y كالآتي:

$$X^* = ax + b, a \neq 0$$

عددان حقيقيان a, b

$$Y^* = cy + d, c \neq 0$$

عددان حقيقيان c, d

فإن معامل الارتباط لا يتأثر إذا اتفقت a, c في الإشارة، وتتغير إشارته فقط إذا اختلفتا في الإشارة.

مثال:

إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين x, y هو $r = 0.9$ وعدلت قيم x وفق المعادلة $X^* = 2x + 6$ كما عدلت قيم y وفق المعادلة $y^* = 8 - 3y$ فما هو معامل الارتباط بين x^*, y^* بعد التعديل.

الحل:

معامل الارتباط الجديد هو -0.9 وذلك لأن معامل x ومعامل y مختلفان في الإشارة.

مثال:

احسب معامل ارتباط بيرسون للجدول التالي:

| | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|
| X | 38 | 41 | 36 | 34 | 37 | 36 |
| Y | 53 | 57 | 51 | 48 | 52 | 51 |

الحل:

نستطيع تعديل المشاهدات حسب المعادلتين $X^* = x - 30$

$Y^* = y - 45$ دون أن يؤثر ذلك على معامل الارتباط فتصبح القيم كالآتي:

$$r_{x,y} = r_{x^*,y^*}$$

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2} \sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}}$$

| x^* | y^* | x^*y^* | $(x^*)^2$ | $(y^*)^2$ |
|-------|-------|----------|-----------|-----------|
| 8 | 8 | 64 | 64 | 64 |
| 11 | 12 | 132 | 121 | 144 |
| 6 | 6 | 36 | 36 | 36 |
| 4 | 3 | 12 | 16 | 9 |
| 7 | 7 | 49 | 49 | 49 |
| 6 | 6 | 36 | 36 | 36 |
| 42 | 42 | 329 | 322 | 338 |

$$(\bar{x}^*) = \frac{42}{6} = 7$$

$$(\bar{y}^*) = \frac{42}{6} = 7$$

$$r = \frac{329 - 6 * 7 * 7}{\sqrt{322 - 6 * 7^2} \sqrt{338 - 6 * 7^2}}$$

$$= \frac{35}{\sqrt{28} \sqrt{44}} = 0.997$$

تمرين

أعد حل المثال باستخدام القيم الأصلية؟

الانحدار Regression

تعريف: معادلة خط الانحدار (regression line equation): هي معادلة خطية

بين متغيرين x, y وتستخدم في التنبؤ بقيم متغير إذا عرف المتغير الآخر.

وهناك صورتان لمعادلة خط الانحدار وهما:

أ- معادلة خط انحدار Y على X وهي:

$$Y = b + ax$$

حيث $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r$ ويسمى (a) معامل الانحدار

σ_x = الانحراف المعياري لقيم x.

σ_y = الانحراف المعياري لقيم y.

r = معامل الارتباط بين x, y

ويمكن الحصول على قيمة a باستخدام طريقة المربعات الصغرى لتكون

$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

أما قيمة b فنجدها من المعادلة $\bar{y} = a\bar{x} + b$ أي أن

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

والمعادلة $y = b + ax$ تستخدم للتنبؤ بقيمة y إذا علمت قيمة x.

مثال:

حسب معامل الارتباط بين نتائج الطلبة في الامتحان (x) والامتحان (y) فكانت $r = 0.8$ ، وكانت $\bar{x} = 59$ ، $\sigma_x = 14$ ، $\bar{y} = 66$ ، $\sigma_y = 7$ فأوجد معادلة خط انحدار y على x ثم أوجد نتيجة الطالب المتوقعة في الامتحان y إذا حصل على علامة 65 في الامتحان x.

الحل:

$$y = b + ax$$

لحسب قيمة a من المعادلة

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r \\ &= \frac{7}{14} (0.8) = 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 66 - 0.4 (59) \\ &= 42.4 \end{aligned}$$

فتكون معادلة خط الانحدار هي:

$$y = 42.4 + 0.4x$$

نتيجة الطالب المتوقعة في الامتحان y إذا كانت علامته في الامتحان $x = 65$ تساوي (65) هي

$$\hat{y} = 42.4 + 0.4 \times 65 = 68.4$$

مثال:

في شركة لتجارة السيارات يمثل الجدول التالي عدد السيارات المباعة x في السنوات 2000-2004 والربح y بالآلاف الدنانير

| | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|
| X | 50 | 40 | 45 | 55 | 60 |
| Y | 75 | 63 | 50 | 72 | 80 |

فأوجد:

- 1- معادلة خط انحدار y على x .
- 2- لو افترضنا أن الشركة ستبيع 50 سيارة في عام 2005 فما الربح المتوقع لها في هذه السنة.

الحل:

1- لإيجاد معادلة خط الانحدار $y = b + ax$

نجد أولاً قيمة a, b

| x | y | xy | x^2 |
|-----|-----|-------|-------|
| 50 | 75 | 3750 | 2500 |
| 40 | 63 | 2520 | 1600 |
| 45 | 50 | 2250 | 2025 |
| 55 | 72 | 3960 | 3025 |
| 60 | 80 | 4800 | 3600 |
| 250 | 340 | 17280 | 12750 |

$$\bar{x} = \frac{250}{5} = 50$$

$$\bar{y} = \frac{340}{5} = 68$$

$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{17280 - 5 \times 50 \times 68}{12750 - 5(50)^2}$$

$$= \frac{280}{250} = 1.12$$

$$b = \bar{y} - ax$$

$$= 68 - 1.12 \times 50$$

$$= 68 - 56 = 12$$

∴ معادلة خط الانحدار

$$y = 12 + 1.12x$$

2- الربح المتوقع للشركة إذا باعت 50 سيارة في عام 2005 هو:

$$\hat{y} = 12 + 1.12x$$

$$= 12 + 1.12 \times 50 = 68$$

أي 68000 J.D

ب - معادلة خط انحدار X على Y وهي:

$$x = d + cy$$

$$c = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} r$$

$$c = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum y^2 - n\bar{y}^2}$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y}$$

وتستخدم معادلة خط انحدار x على y للتنبؤ بقيمة x إذا علمت قيمة y.

مثال:

إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين y, x هي $x = 106 + 5y$ وكانت $\sigma_x = 18$ ، $\sigma_y = 3$ ، فما هو معامل الارتباط بين x, y .

الحل:

نعلم من معادلة خط المحدار x على y أن

$$c = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot r$$

$$\Rightarrow r = c \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= 5 * \frac{3}{18} = \frac{15}{18} = 0.833$$

مثال:

في امتحان تحصيلي لستة طلاب في مادتي الرياضيات (x) والإحصاء (y) كانت النتائج كالتالي:

| | | | | | | |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|
| الرياضيات (x) | 60 | 75 | 50 | 40 | 63 | 72 |
| الإحصاء (y) | 80 | 83 | 55 | 70 | 60 | 78 |

أوجد:

أ- معادلة خط المحدار x على y .

ب- إذا حصل طالب على علامة (60) في الإحصاء فماذا تكون علامته في الرياضيات.

الحل:

أ- معادلة خط المحدار x على y هي $x = d + cy =$

$$c = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum y^2 - n\bar{y}^2}$$

حيث

| الرياضيات (x) | الإحصاء (y) | xy | y ² |
|---------------|-------------|-------|----------------|
| 60 | 80 | 4800 | 6400 |
| 75 | 83 | 6225 | 6889 |
| 50 | 55 | 2750 | 3025 |
| 40 | 70 | 2800 | 4900 |
| 63 | 60 | 3780 | 3600 |
| 72 | 78 | 5616 | 6084 |
| 360 | 426 | 25971 | 30898 |

$$\bar{x} = \frac{360}{6} = 60$$

$$\bar{y} = \frac{426}{6} = 71$$

$$c = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum y^2 - n\bar{y}^2}$$

$$= \frac{25971 - 6 * 60 * 71}{30898 - 6(71)^2}$$

$$= \frac{411}{652} = 0.63$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y}$$

$$= 60 - 0.63 \times 71$$

$$= 15.27$$

∴ معادلة خط الانحدار هي $x = 15.27 + 0.63y$

ب- إذا حصل الطالب على علامة (60) في الإحصاء (y) فإن علامته المتوقعة في الرياضيات (x) تكون:

$$\hat{x} = 15.7 + 0.63 \times 60$$

$$= 53.07$$

تعريف: الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

e = actual vale (θ) - estimated value of θ

i.e: $e = \theta - \hat{\theta}$

ففي المثال السابق الفرع (ب)

يكون الخطأ في التنبؤ

$$\begin{aligned} e &= x - \hat{x} \\ e &= 63 - 53.07 \\ &= 9.93 \end{aligned}$$

مثال:

إذا كانت معادلة خط المحدار y على x هي $y = 10 + 0.7x$ وكانت قيمة y التي تقابل القيمة $(x - 20)$ هي 25 فما هو الخطأ في التنبؤ بقيمة y .

الحل:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 10 + 0.7 \times 20 \\ &= 24 \end{aligned}$$

قيمة y المتنبأ بها هي:

الخطأ في التنبؤ

$$e = y - \hat{y}$$

ملاحظات:

إذا كانت $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ مجموعة من الأزواج المرتبة لقيم x, y . واستخدمت لإيجاد:

أ- معادلة المحدار y على x وهي $y = b + ax$

ب- معادلة المحدار x على y وهي $x = d + cy$

فإنه

1- إذا مثلت المعادلتين في نفس المستوى البياني تكون نقطة تقاطع خطي الانحدار هي (\bar{x}, \bar{y}) .

2- a, c لهما نفس الإشارة وهي إشارة معامل الارتباط r .

$$r^2 = a * c \Rightarrow r = \pm \sqrt{ac} \quad -3$$

مثال:

إذا كانت معادلة الانحدار y على x هي $y = 8 - 0.9x$ وكانت معادلة الانحدار x على y هي $x = 9 - 0.4y$ ، احسب معامل الارتباط بين المتغيرين x ، y ؟

الحل:

$$r^2 = -0.9 \times -0.4$$

$$= 0.36$$

$$\Rightarrow r = \pm 0.6$$

$$\Rightarrow r = -0.6$$

وقد أخذت الإشارة السالبة لأن معاملي الانحدار سالبين.

معامل التحديد The Coefficient of Determination

يمثل معامل التحديد نسبة لانخفاض في الأخطاء عند استخدام معادلة خط الانحدار، وتفسر تباين المشاهدات التي تفسر بمعادلة خط الانحدار ويرمز له بالرمز (R^2) ونجده باستخدام القانون:

$$R^2 = \frac{a(\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})}{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}$$

وتكون قيمته محصورة بين صفر و (1).

مثال:

إذا كانت معادلة خط الانحدار هي:

$$y = 12 + 1.12x$$

$$\sum x_i y_i = 17280, \bar{x} = 50, \bar{y} = 68 \quad \text{وكان}$$

$$\sum y_i^2 = 23678, n = 5$$

جد معامل التحديد

الحل:

$$R^2 = \frac{1.12(17280 - 5(50)(86))}{23678 - 5(68)^2}$$

$$R^2 = \frac{313.6}{558} = 0.562$$

تمرين: اثبت أن معامل التحديد (R^2) = مربع ارتباط بيرسون

تعاريف

1- يمثل الجدول التالي الأطوال (x) والأوزان (y) لعشرة طلاب في إحدى كليات المجتمع.

| | | | | | | | | | | |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X cm | 170 | 172 | 165 | 175 | 168 | 180 | 160 | 158 | 173 | 167 |
| Y kg | 70 | 72 | 73 | 72 | 70 | 77 | 68 | 65 | 71 | 70 |

أ- أرسم لوحة الانتشار.

ب- احسب معامل ارتباط بيرسون بين أطوال وأوزان الطلبة.

ج- احسب معامل ارتباط سيرمان بين الأطوال والأوزان.

د- أوجد معادلة خط انحدار y على x.

2- إذا كان لدينا المجاميع التالية:

$$\sum_{i=1}^{30} y_i = 1154$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 1134$$

$$\sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 45636$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 44564$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i y_i = 44931$$

a- احسب معامل ارتباط بيرسون.

b- أوجد معادلة خط انحدار x على y.

3- إذا كان معامل الارتباط بين x, y هو $r = 0.7$ وعدلت حسب المعادلتين

$$x^* = 2.5x + 7$$

$$y^* = 3y - 6$$

فما هو معامل الارتباط بين x^*, y^* .

4- إذا كان معامل ارتباط سيرمان (الرتب) بين متغيرين x, y هو $r = 0.8$ وكان عدد أزواج

الملاحظات يساوي 40، فأوجد مجموع مربعات فروق الرتب بين x, y.

5- إذا كانت معادلة خط الانحدار $y = 7 + 0.5x$ وكان

$$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 250$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 640$$

أوجد معامل الارتباط (r) بين x, y .

6- للجدول التالي:

| | | | | | |
|---|----|---|----|---|----|
| X | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| Y | 15 | 9 | 12 | 6 | 3 |

a- جد معامل ارتباط بيرسون بين قيم x, y ؟

b- معادلة انحدار y على x ؟

c- معادلة انحدار y على x ؟

d- ارسم معادلتى الانحدار في نفس المستوى وتأكد أن نقطة تقاطعهما هي (\bar{x}, \bar{y}) ؟

e- احسب الخطأ في التنبؤ بقيمة y إذا علمت أن $x=8$ ؟

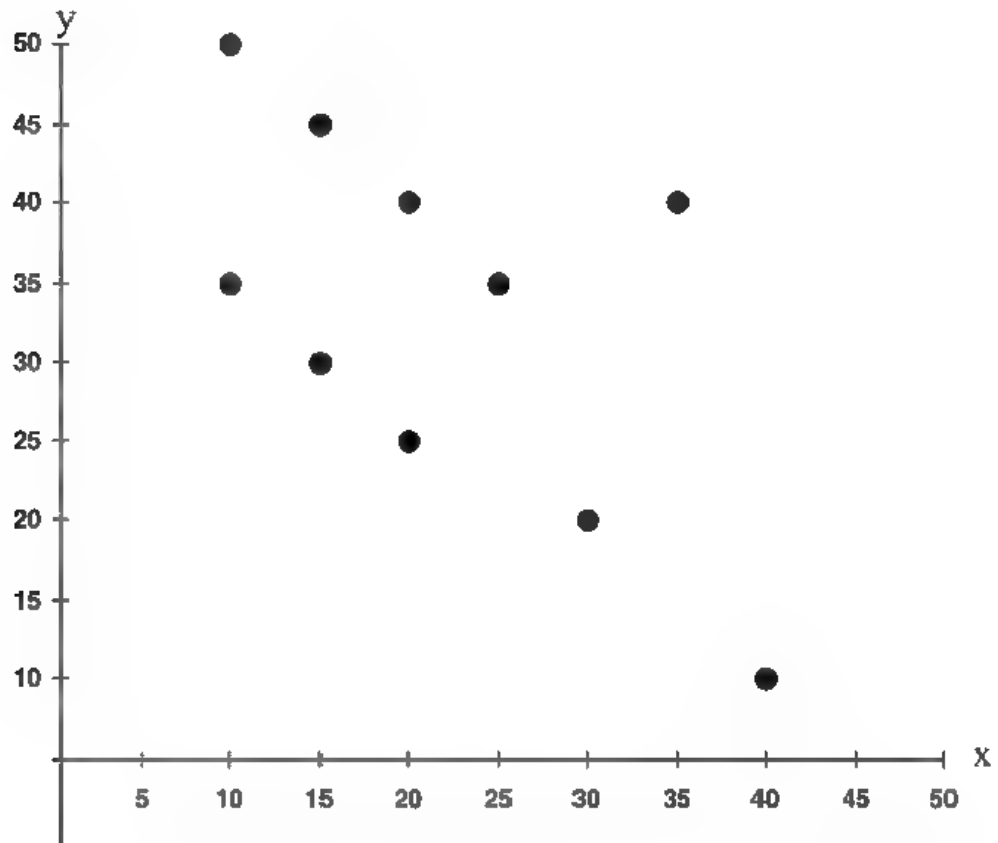
f- احسب الخطأ في التنبؤ بقيمة x إذا علمت أن قيمة $y=6$ ؟

7- إذا كانت معادلة انحدار y على x هي $y = -15 + 2x$ وكانت $r = 0.8$ ، $\bar{x} = 50$ ، فجد معادلة انحدار x على y ؟

8- إذا كانت معادلة انحدار y على x هي $y = -2 + 1.2x$ ومعادلة انحدار x على y هي $x = 11 + 0.7y$ جد الوسط الحسابي لكل من قيم x, y ؟

9- إذا حُسب معامل ارتباط سيرمان باستخدام الأزواج المرتبة $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ فكان (0.4). وكان مجموع مربعات فروق الرتب لقيم x, y هو (99)، فما قيمة n ؟

10- الشكل التالي هو شكل الانتشار لقيم x, y .



جد:

أ - معامل ارتباط بيرسون.

ب - معامل ارتباط سبيرمان.

5

الوحدة الخامسة

نظرية الاحتمال

Probability Theory

نظرية الاحتمال

Probability Theory

نظرية الاحتمالات تهتم بما يسمى بالتجارب العشوائية، والتجارب العشوائية هي تلك التجارب التي يمكن حصر نتائجها مسبقاً ولكن لا يمكن الجزم ماذا ستكون النتيجة. فمثلاً إذا ألقينا قطعة نقد فنكون عالمين سلفاً بأن النتيجة قد تكون صورة أو كتابة لكننا لا نجزم على أنها صورة أو أنها كتابة. والآن نبدأ بعرض بعض مفاهيم نظرية الاحتمالات.

الفضاء العيني (أو الفراغ العيني) والحادث Sample space and Event

تعريف: الفضاء العيني هو مجموعة كافة النتائج المتوقعة للتجربة العشوائية. وسنرمز للفضاء العيني بالرمز Ω ويقرأ أوميغا.

الآن سنعطي أمثلة على فراغات عينية شائعة في موضوع الاحتمالات، لتكون مرجعية للقارئ عند حاجته لها.

1- تجربة رمي قطعة نقد مرة واحدة تكون $\Omega = \{H, T\}$

حيث

H: Head صورة

T: Tail كتابة

2- تجربة رمي قطعتي نقد مرة واحدة (أو قطعة مرتين)

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

3- تجربة رمي ثلاث قطع نقدية مرة واحدة (أو قطعة ثلاث مرات).

$$\Omega = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), (H,T,T), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$$

4- رمي حجر نرد مرة واحدة $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

5- رمي حجر نرد وقطعة نقد.

$$\Omega = \{(1,H), (2,H), (3,H), (4,H), (5,H), (6,H), \\ (1,T), (2,T), (3,T), (4,T), (5,T), (6,T)\}$$

6- رمي حجر نرد مرة واحدة (أو رمي حجر مرتين)

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

تعريف:

- 1- إذا كانت Ω فضاء عينيا لتجربة عشوائية ما فإن أية مجموعة جزئية مثل E من Ω ($E \subset \Omega$) تدعى حادثاً (event).
- 2- إذا كان E حادثاً في Ω يتكون من عنصر واحد فإنه يسمى حادثاً بسيطاً Simple event.
- 3- وإذا كان E حادثاً فيه أكثر من عنصر من عناصر Ω فيسمى حادثاً مركباً Compound event.
- 4- $\Omega \supset \phi$ وبالتالي فإن ϕ حادثاً في Ω ، يسمى هذا الحادث بالحادث المستحيل. (Null event)
- 5- $\Omega \supset \Omega$ وبالتالي فإن Ω حادثاً في Ω ، يسمى هذا الحادث بالحادث الأكيد. (Sure event).

بالرجوع إلى الفراغ العيني Ω لتجربة رمي قطعتي نقد إذا كان

$$E_1 = \{(H,T), (T,H)\} \text{ حادث في } \Omega \text{ فإنه حادث مركب}$$

$$\text{أما } E_2 = \{(T,T)\} \text{ حادث بسيط في } \Omega.$$

أيضاً يمكنك إعطاء أمثلة على حوادث مختلفة بسيطة ومركبة لنفس التجربة.

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد ليكن

- E_1 : هو الحادث الذي يكون مجموع الوجهين الظاهرين فيه (4).
 E_2 : هو الحادث الذي يكون مجموع الوجهين الظاهرين فيه (10).
 E_3 : هو الحادث الذي يكون الوجه الأول فيه فرديا (odd) والوجه الثاني زوجي (even).
 E_4 : هو الحادث الذي يكون مجموع الوجهين الظاهرين فيه أكبر من (10).
 E_5 : الوجه الأول يقبل القسمة على (divisible by) الوجه الثاني.
 اكتب هذه الحوادث صريحة.

الحل:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(1,3), (3,1), (2,2)\} \\ E_2 &= \{(4,6), (6,4), (5,5)\} \\ E_3 &= \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6)\} \\ E_4 &= \{(5,6), (6,5), (6,6)\} \\ E_5 &= \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), \\ &\quad (6,6), (4,2), (6,2), (6,3)\} \end{aligned}$$

تعريف: إذا كان E_1, E_2 حادثين في الفراغ العيني Ω بحيث لا يوجد بينهما عناصر مشتركة أي $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ فيسمى الحادثين بمحدثين منفصلين (disjoint events).

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة إذا كان

$$E_1 = \{1,2,3\} \quad E_2 = \{1,3,5\} \quad E_3 = \{2,4\}$$

فأي أزواج الحوادث التالية منفصلة:

$$E_2, E_3 \quad (c) \quad E_1, E_3 \quad (b) \quad E_1, E_2 \quad (a)$$

الحل:

$$\begin{aligned} -a \quad E_1 \cap E_2 &= \{1,3\} \quad \text{وبالتالي } E_1, E_2 \text{ ليسا منفصلين.} \\ -b \quad E_1 \cap E_3 &= \{2\} \quad \text{وبالتالي } E_1, E_3 \text{ ليسا منفصلين.} \\ -c \quad E_2 \cap E_3 &= \emptyset \quad \text{وبالتالي } E_2, E_3 \text{ منفصلان.} \end{aligned}$$

التكرار النسبي والاحتمال (Relative Frequency and Probability)

تعريف:

إذا كان n عدد مرات إجراء تجربة عشوائية، m عدد مرات الحصول على الحادث E فإن $\frac{m}{n}$ تدعى بالتكرار النسبي للحادث أو الاحتمال التجريبي للحادث. وعندما تصبح قيمة n كبيرة جداً ($n \rightarrow \infty$) فإن التكرار النسبي يقترب من قيمة محددة سنرمز لها بالرمز $p(E)$ وتسمى الاحتمال النظري للحادث E .

نشاط:

لتكن n عدد مرات إلقاء قطعة نقد، m عدد مرات ظهور الصورة. أكمل الفراغ في الجدول التالي بعد إجراء التجربة عملياً.

| عدد مرات التجربة (n) | عدد مرات الحصول على الصورة (m) | التكرار النسبي $\frac{m}{n}$ |
|-------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| 10 | | |
| 20 | | |
| 50 | | |
| 100 | | |
| 200 | | |

في النشاط السابق لو أصبحت قيمة (n) كبيرة جداً فإن $\left(\frac{m}{n}\right)$

ستقترب من القيمة $\frac{1}{2}$ ، وبالتالي فإن $P(\{H\}) = \frac{1}{2}$

تعريف:

إذا كانت Ω فضاء عينيًا وكان كل حادث بسيط في Ω له نفس فرصة الحدوث. وكان E حادثًا في Ω فإن

احتمال الحادث $(E) = \frac{\text{عدد عناصر } E}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ ويسمى هذا الاحتمال النظري للحادث E :

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(\Omega)}$$

حيث # تعني عدد العناصر.

وتسمى Ω في هذه الحالة بالفضاء العيني المنتظم (Uniform space).

تعريف: لأي فضاء عيني Ω (منتظم أو غير منتظم) يعرف اقتران الاحتمال

$P: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, حيث $P(\Omega)$ مجموعة كافة حوادث Ω , \mathbb{R} مجموعة الأعداد

الحقيقية.

من خلال المسلمات التالية:

$$1- \text{ لأي حادث } E \subset \Omega, \quad P(E) \geq 0, \quad P(\Omega) = 1,$$

$$2- \text{ إذا كان } E_1, E_2 \text{ حادثين منفصلين في } \Omega \text{ فإن}$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$3- \text{ إذا كان } E_1, E_2, \dots \text{ حوادث في } \Omega \text{ بحيث}$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset$$

$$\text{لأي } i \neq j$$

$$P(E_1 \cup E_2, \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$$

ملاحظة: تقرأ $P(E)$ احتمال الحادث E . (Probability of E)

خواص الاحتمال (Properties of probability):

إذا كانت Ω فضاء عينا فإنه

$$1- \text{ إذا كان } E_1, E_2 \text{ حادثين في } \Omega, \quad E_1 \subset E_2 \text{ فإن } P(E_1) \leq P(E_2)$$

$$2- \text{ لأي حادث } E, \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

$$3- \quad P(\emptyset) = 0$$

$$4- \quad P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$5- \quad P(E_1 \mid \bar{E}_2) = P(E_1) - P(E_1 \mid E_2)$$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة إذا كان:

$$\{1,2\} = E_1$$

$$\{1,4,5\} = E_2$$

$$\text{أن يكون الوجه الظاهر عدداً فردياً فأوجد} = E_3$$

$$(a) P(E_1) \quad (b) P(E_2) \quad (c) P(E_3)$$

$$(d) P(E_1 \cup E_2) \quad (e) P(E_1 \cap E_2)$$

الحل:

لاحظ أن عدد عناصر $\Omega = 6$

$$a- P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b- P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$c- P(E_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$d- E_1 \cup E_2 = \{1,2,4,5\} \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$e- E_1 \cap E_2 = \{1\} \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$$

مثال:

صندوق يحوي (7) كرات سوداء، 3 كرات بيضاء، سحبت من الصندوق كرة

واحدة عشوائياً (Raudomly) أوجد:

a- احتمال أن تكون سوداء (Black).

b- احتمال أن تكون بيضاء (White).

c- احتمال أن تكون حمراء (Red).

الحل:

$$a- P(\text{Black}) = \frac{7}{10}$$

$$b- P(\text{White}) = \frac{3}{10}$$

$$c- P(\text{Red}) = p(\phi) = 0$$

مثال:

$$P(E_1 - E_2) \text{ جد } P(E_1 \cap E_2) = 0.3, P(E_1) = 0.4 \text{ إذا كان}$$

الحل:

$$\begin{aligned} P(E_1 - E_2) &= P(E_1) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= 0.4 - 0.3 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

تعريف: إذا كان E حادثاً في الفراغ العيني Ω , فعدم وقوع E يعرف بأنه متمم الحادث E (Complement of E) ويرمز له بالرمز \bar{E} ويكون:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

مثال:

$$P(E) = 0.8 \text{ إذا كان}$$

$$P(\bar{E}) \text{ فأوجد}$$

الحل:

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= 1 - P(E) \\ &= 1 - 0.8 \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

تعريف: إذا كانت E_1, E_2, \dots, E_n حوادث في Ω بحيث أن

$$1- E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \Omega$$

$$2- E_i \cap E_j = \phi \text{ لكل } i \neq j$$

فإن هذه الحوادث تسمى حوادث متباعدة وشاملة.

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، إذا كان

$$E_3 = \{3\}, E_2 = \{3, 4, 5\}, E_1 = \{1, 6\}$$

فهل هذه الحوادث متباعدة وشاملة؟

الحل:

$$E_2 \cap E_3 = \phi \quad , \quad E_1 \cap E_3 = \phi \quad , \quad E_1 \cap E_2 = \phi$$

أي أن E_3, E_2, E_1 منفصلة متني. (Mutually exclusive)

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

∴ E_3, E_2, E_1 حوادث متباعدة وشاملة.

نظرية: إذا كانت E_1, E_2, \dots, E_n حوادث متباعدة وشاملة فإن:

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1$$

مثال:

إذا كانت E_1, E_2, E_3, E_4 حوادث متباعدة وشاملة وكان

$$P(E_1) = 0.2, P(E_2) = 0.5, P(E_3) = 0.1$$

فأوجد $P(E_4)$ ؟

الحل:

E_1, E_2, E_3, E_4 حوادث متباعدة وشاملة

$$\therefore P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = 1$$

$$0.2 + 0.5 + 0.1 + P(E_4) = 1$$

$$P(E_4) = 0.2$$

قانون جمع الاحتمالات

نظرية: إذا كان E_1, E_2 حادثين في Ω ، فإن احتمال وقوع (E_1) أو (E_2) هو

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

حيث $P(E_1 \cap E_2)$ هي احتمال حدوث الحادثين معا.

مثال:

إذا كان $P(A) = 0.4$ ، $P(B) = 0.8$ ، $P(A \cap B) = 0.35$

فأوجد $P(A \cup B)$

الحل:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.4 + 0.8 - 0.35 \\ &= 0.85 \end{aligned}$$

مثال:

إذا كانت نسبة الأشخاص الذين عيونهم سوداء في مدينة عمان 70% وكانت نسبة الأشخاص الذين شعرهم أسود 40%، ونسبة الأشخاص الذين عيونهم سوداء وشعرهم أسود 30%. فإذا اخترنا شخصا عشوائيا من مدينة عمان فأوجد احتمال:

a- أن تكون عيونه سوداء أو شعره أسود.

b- أن لا يكون ذو عيون سوداء.

c- أن يكون ذو شعر أسود وعيونه ليست سوداء.

الحل:

لنفرض أن الحادث E_1 هو الحادث الذي يكون فيه الشخص الذي تم اختياره ذو عيون سوداء.

E_2 هو الحادث الذي يكون فيه الشخص الذي تم اختياره ذو شعر أسود.

فيكون $P(E_1) = 0.7$, $P(E_2) = 0.4$, $P(E_1 \cap E_2) = 0.3$

$$\begin{aligned} \text{a- } P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= 0.7 + 0.4 - 0.3 = 0.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b- } P(\bar{E}_1) &= 1 - P(E_1) \\ &= 1 - 0.7 \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c- } P(\bar{E}_1 \cap E_2) &= P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= 0.4 - 0.3 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

مثال:

إذا كان E_1, E_2 حادثين منفصلين في Ω وكان

$$P(E_1) = \frac{3}{7}, P(E_2) = \frac{2}{7}$$

فأوجد $P(E_1 \cup E_2)$

الحل:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= P(E_1) + P(E_2) \end{aligned}$$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

الحوادث المستقلة (Independent Events) "قانون ضرب الاحتمالات"

تعريف: إذا كان E_1, E_2 حادثين في Ω فيدعى E_1, E_2 حادثين مستقلين إذا كان أحدهما لا يتأثر بوقوع الآخر. وبصفة رياضية يكون E_1, E_2 مستقلين إذا كان

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

مثال:

إذا كان E_1, E_2 حادثين في Ω ، وكان $P(E_1) = 0.9$ ، $P(E_2) = 0.5$ ،
 $P(E_1 \cap E_2) = 0.45$ فهل E_1, E_2 مستقلان؟

الحل:

$$\begin{aligned} P(E_1)P(E_2) &= (0.9)(0.5) \\ &= 0.45 \\ &= P(E_1 \cap E_2) \end{aligned}$$

إذن E_1, E_2 حادثين مستقلين.

مثال:

إذا كان E_1, E_2 حادثين مستقلين في Ω وكان $P(E_1) = 0.6$ ، $P(E_2) = 0.5$

فأوجد:

- a- $P(E_1 \cap E_2)$
- b- $P(E_1 \cup E_2)$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{a- } P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1)P(E_2) \\ &= (0.6) (0.5) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b- } P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= 0.6 + 0.5 - 0.3 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

مثال:

أطلق صيادان نحو هدف فإذا كان احتمال إصابة الأول للهدف 0.8 واحتمال إصابة الثاني للهدف 0.6 فأوجد احتمال
 -a إصابة الاثنين معا للهدف.
 -b إصابة الهدف.

الحل:

$$E_1 : \text{أن يصيب الأول الهدف} \Leftarrow P(E_1) = 0.8$$

$$E_2 : \text{أن يصيب الثاني الهدف} \Leftarrow P(E_2) = 0.6$$

$$\begin{aligned} \text{a- } P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1)P(E_2) \\ &= (0.8) (0.6) \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b- } P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ &= 0.8 + 0.6 - 0.48 \\ &= 0.92 \end{aligned}$$

مثال:

صندوق يحوي (6) كرات سوداء (Black)، (4) كرات حمراء (Red) سحب من الصندوق كرتان على التوالي مع الإرجاع، أوجد احتمال.

- a- أن تكون الكرتان سوداوين.
b- أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية حمراء.
c- أن تكون إحدى الكرتين سوداء.
d- أن تكون الكرتان من نفس اللون.

الحل:

السحب هنا على التوالي مع الإرجاع فذلك يعني أن السحبة الثانية لا تتأثر بالسحبة الأولى فهذا يعني حوادث مستقلة.

$$\begin{aligned} \text{a- } P(B, B) &= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \\ &= \frac{36}{100} \end{aligned}$$

| (B) | (R) |
|-----|-----|
| 6 | 4 |

$$\begin{aligned} \text{b- } P(B, R) &= \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{24}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c- } P(\text{إحدى الكرتين سوداء}) &= P(B, R) + P(R, B) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} \\ &= \frac{48}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d- } P(\text{الكرتان نفس اللون}) &= P(B, B) + P(R, R) \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{52}{100} \end{aligned}$$

تمرين: أعد حل المثال السابق إذا كان السحب دون إرجاع.

نظرية: إذا كان E_1 ، E_2 حادثين مستقلين في Ω فإن

-1 E_1, \bar{E}_2 مستقلان.

-2 E_2, \bar{E}_1 مستقلان.

-3 \bar{E}_2, \bar{E}_1 مستقلان.

مثال:

إذا كان E_1, E_2 حادثين مستقلين في Ω ، $P(E_1) = 0.3$ ، $P(E_2) = 0.4$

فأوجد:

a- $P(E_1 \cap E_2)$

b- $P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2)$

c- $P(\bar{E}_1 \cap E_2)$

d- $P(\bar{E}_1 \cup E_2)$

الحل:

a- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

$$= (0.3) (0.4)$$

$$= 0.12$$

b- $P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) = P(\bar{E}_1)P(\bar{E}_2)$

$$= (0.7) (0.6)$$

$$= 0.42$$

c- $P(\bar{E}_1 \cap E_2) = P(\bar{E}_1) P(E_2)$

$$= (0.7) (0.4)$$

$$= 0.28$$

d- $P(\bar{E}_1 \cup E_2) = P(\bar{E}_1) + P(E_2) - P(\bar{E}_1 \cap E_2)$

$$= 0.7 + 0.4 - 0.28$$

$$= 0.82$$

الاحتمال المشروط ونظرية بايز

(Conditional Probability and Bay's Theorm)

تعريف:

إذا كان E_1 ، E_2 حادثين في Ω فإن احتمال حدوث E_1 بشرط حدوث E_2 يرمز له بالرمز

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad , \quad P(E_2) \neq 0$$

مثال:

إذا كان $P(E_1 \cap E_2) = 0.6$ ، $P(E_2) = 0.8$ ، $P(E_1) = 0.7$

فأوجد:

a) $P(E_1/E_2)$

b) $P(E_2/E_1)$

c- $P(E_1/\bar{E}_2)$

d) $P(\bar{E}_1/E_2)$

e) $P(\bar{E}_1/\bar{E}_2)$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{a-} \quad P(E_1/E_2) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \\ &= \frac{0.6}{0.8} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b-} \quad P(E_2/E_1) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \\ &= \frac{0.6}{0.7} \\ &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c- } P(\bar{E}_1/\bar{E}_2) &= \frac{P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2)}{P(\bar{E}_1)} \\
 &= \frac{P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)}{1 - P(E_2)} \\
 &= \frac{0.7 - 0.6}{1 - 0.8} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d- } P(\bar{E}_1/E_2) &= \frac{P(\bar{E}_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \\
 &= \frac{P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \\
 P(\bar{E}_1/E_2) &= \frac{0.8 - 0.6}{0.8} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e- } P(\bar{E}_1/\bar{E}_2) &= \frac{P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2)}{P(\bar{E}_2)} \\
 &= \frac{P(\overline{E_1 \cup E_2})}{P(\bar{E}_2)} \quad \square \text{ قانون ديمورغان}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore P(\bar{E}_1/\bar{E}_2) &= \frac{1 - P(E_1 \cup E_2)}{1 - P(E_2)} \\
 &= \frac{1 - 0.9}{1 - 0.8} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

مثال:

إذا كان $P(E_1/E_2) = 0.3$ ، $P(E_2) = 0.45$

أوجد

a- $P(E_1 \cap E_2)$

b- $P(\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2)$

الحل:

a- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1/E_2)P(E_2)$

$$= 0.3 \times 0.45$$

$$= 0.135$$

b- $P(\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2) = P(\overline{E_1 \cap E_2})$

$$= 1 - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= 1 - 0.135$$

$$= 0.865$$

مثال:

إذا كان احتمال قبول صفاء في جامعة البلقاء 0.9 واحتمال قبول هيفاء في نفس الجامعة 0.8 واحتمال قبول الاثنتين معا 0.75 احسب:

a- احتمال قبول صفاء إذا قبلت هيفاء.

b- إذا قبلت صفاء فما احتمال قبول هيفاء.

c- إذا لم تقبل صفاء فما احتمال قبول هيفاء.

الحل:

$$P(E_1) = 0.9 \quad \Leftarrow \quad \text{أن تقبل صفاء} \quad : E_1$$

$$P(E_2) = 0.8 \quad \Leftarrow \quad \text{أن تقبل هيفاء} \quad : E_2$$

$$\therefore P(E_1 \cap E_2) = 0.75$$



$$\begin{aligned} \text{a- } P(E_1/E_2) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \\ &= \frac{0.75}{0.8} \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b- } P(E_2/E_1) &= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \\ &= \frac{0.75}{0.9} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c- } P(E_2/\bar{E}_1) &= \frac{P(\bar{E}_1 \cap E_2)}{P(\bar{E}_1)} \\ &= \frac{P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}{1 - P(E_1)} \\ &= \frac{0.8 - 0.75}{1 - 0.9} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

ملاحظة: إذا كان E_1 ، E_2 حادثين مستقلين في Ω فإن

$$\begin{aligned} P(E_1/E_2) &= P(E_1) \\ P(E_2/E_1) &= P(E_2) \end{aligned}$$

مثال:

صندوق يحوي ست كرات بيضاء وأربع كرات سوداء سحب من الصندوق

كرتين على التوالي دون إرجاع احسب:

a- احتمال أن تكون الثانية سوداء إذا كانت الأولى بيضاء.

b- احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية سوداء.

c- احتمال أن تكون الكرتان مختلفتان في اللون.

الحل:

$$a- P(B/W) = \frac{4}{9}$$

| بيضاء | سوداء |
|-------|-------|
| (W) | (B) |
| 6 | 4 |

$$b- P(W \cap B) = P(B/W)P(W)$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{4}{15}$$

$$c- p(\text{مختلفتان في اللون}) = P(B, W) + P(W, B)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{8}{15}$$

نظرية بيز Bay's Theorem

إذا كانت E_1, E_2, \dots, E_n حوادث متباعدة وشاملة في الفضاء العيني Ω .

فإن $E \subset \Omega$

$$1. P(E) = P(E/E_1)P(E_1) + P(E/E_2)P(E_2) + \dots + P(E/E_n)P(E_n)$$

$$2. p(E_m/E) = \frac{P(E/E_m)P(E_m)}{P(E)}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

مثال:

يذهب رجل إلى عمله مستخدماً إحدى الوسائل التالية باص، سيارة، قطار مستخدماً هذه الوسائل بنسبة مئوية 60٪، 30٪، 10٪ من الأيام على التوالي، فإذا كان احتمال أن يتأخر عن عمله إذا استخدم الباص 15٪ من الأيام وإذا استخدم

السيارة 8٪، وإذا استخدم القطار 20٪. فإذا اخترنا أحد الأيام التي يذهب فيها إلى العمل عشوائياً:

a- احسب احتمال أن يتأخر عن عمله في ذلك اليوم؟

b- إذا كان متأخراً عن عمله في ذلك اليوم ما احتمال أن يكون قد استخدم القطار؟

الحل:

$$E_1 : \text{أن يستخدم الباص} \quad \Leftarrow \quad P(E_1) = 0.6$$

$$E_2 : \text{أن يستخدم السيارة} \quad \Leftarrow \quad P(E_2) = 0.3$$

$$E_3 : \text{أن يستخدم القطار} \quad \Leftarrow \quad P(E_3) = 0.1$$

E : أن يتأخر الرجل عن عمله.

$$P(E/E_1) = 0.15, \quad P(E/E_2) = 0.08, \quad P(E/E_3) = 0.2$$

$$\begin{aligned} a- \quad P(E) &= P(E/E_1)P(E_1) + P(E/E_2)P(E_2) + P(E/E_3)P(E_3) \\ &= (0.15)(0.6) + (0.08)(0.3) + (0.2)(0.1) \quad \square \end{aligned}$$

$$\therefore P(E) = 0.134$$

$$b- \quad P(E_3/E) = \frac{P(E/E_3)P(E_3)}{P(E)}$$

$$P(E_3/E) = \frac{(0.2)(0.1)}{0.134}$$

$$= \frac{10}{67}$$

مثال:

صندوقان A، B متشابهان، في A خمس كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء، في B تسع كرات بيضاء وأربع كرات سوداء. فإذا اختر أحد الصندوقان عشوائياً ثم سحب منه كرة عشوائياً احسب احتمال أن تكون من الصندوق A إذا كانت بيضاء.

الحل:

$$P(E_1) = \frac{1}{2} \Leftarrow \text{اختيار الصندوق A} : E_1$$

$$P(E_2) = \frac{1}{2} \Leftarrow \text{اختيار الصندوق B} : E_2$$

E : أن تكون الكرة بيضاء.

$$P(E/E_1) = \frac{5}{8}$$

$$P(E/E_2) = \frac{9}{13}$$

$$P(E_2/E) = \frac{P(E/E_2)P(E_2)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(E/E_2)P(E_2)}{P(E/E_1)P(E_1) + P(E/E_2)P(E_2)}$$

$$= \frac{\frac{9}{13} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{13} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{72}{137}$$

المتغيرات العشوائية (Random Variables)

تعريف: المتغير العشوائي هو اقتران (Function) (X) بمجاله الفضاء العيني Ω (Sample Space) ومداه $X(\Omega)$ هو مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{أي أن}$$

وإذا كان مداه مجموعة جزئية من الأعداد النسبية Q يدعى متغيراً عشوائياً منفصلاً (discrete random variable).

أما إذا كان مداه يحوي فترة من الأعداد الحقيقية (R) فيدعى متغيراً عشوائياً متصلاً (continuous random variable).

والآن سندرس كل نوع من المتغيرات العشوائية على حده.

المتغير العشوائي المنفصل (Discrete Random Variable)

تعريف: إذا كان X متغيراً عشوائياً منفصلاً فإن الاقتران $f(x)$ يدعى اقتران احتمال (Probability Function) أو اقتران توزيع (Distribution Function) إذا كان

$$f(x) = P(X=x) \quad x \in X(\Omega)$$

وتسمى المجموعة $\{(x, f(x)): x \in X(\Omega)\}$ بالتوزيع الاحتمالي (Probability distribution).

مثال:

في تجربة رمي ثلاث قطع نقد. إذا عرفنا المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور (Heads) الظاهرة، أوجد

$$X(H, H, T) \quad -a$$

$$X(T, T, T) \quad -b$$

$$X(\Omega) \quad -c \quad (X \text{ مدى})$$

الحل:

$$a- X(H, H, T) = 2$$

$$b- X(T, T, T) = 0$$

$$c- X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

مثال:

كيس فيه ثلاث كرات بيضاء (White Balls) وأربع كرات سوداء (Black Balls). فإذا سحب من الكيس خمس كرات على التوالي (one after another) دون إرجاع (without replacement). فإذا عرفنا المتغير العشوائي X على أنه عدد الكرات السوداء، أوجد مدى X

الحل:

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$$

مثال:

في تجربة رمي قطعتي النقد، إذا عرفنا المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة، اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

الحل:

$$\{(x, f(x)) : x \in X(\Omega)\} = \text{التوزيع الاحتمالي}$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

فيكون التوزيع الاحتمالي

$$\left\{ \left(0, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right) \right\}$$

ملاحظة: إذا كان $f(x)$ اقتران احتمال (Probability Function) للمتغير العشوائي X الذي مداه $X(\Omega)$ فيكون

$$1. f(x) \geq 0 \quad x \in X(\Omega)$$

$$2. \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1$$

تعريف:

1- إذا كان X متغيراً عشوائياً فإن الوسط الحسابي (Mean) للمتغير العشوائي (X) هو

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} X f(x)$$

كذلك يسمى الوسط الحسابي بالتوقع (Expectation) للمتغير العشوائي X .
2- يعرف العزم K (k^{th} moment) بأنه

$$E(X^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} X^k f(x)$$

3- الانحراف المعياري (Standard deviation) للمتغير العشوائي (X) هو

$$\sigma = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$$

ويسمى مربع الانحراف المعياري

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

بالتباين (Variance).

مثال:

إذا كان X متغير عشوائياً يأخذ قيمة في المجموعة $\{1, 2, 3\} - x(\Omega)$ وكان اقتران الاحتمال له هو

$$f(x) = \frac{x}{6}$$

احسب:

1- التوزيع الاحتمالي.

2- توقع X

3- العزم الثاني للمتغير العشوائي X

4- Variance (x)

الحل:

1) التوزيع الاحتمالي: $\left\{ \left(1, \frac{1}{6}\right), \left(2, \frac{1}{3}\right), \left(3, \frac{1}{2}\right) \right\}$

$$2) \quad E(X) = \sum_{x=1}^3 Xf(x)$$

$$E(X) = 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{7}{3}$$

3) $E(X^2)$ = العزم الثاني

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{x=1}^3 X^2 f(x) \\ &= (1)^2 f(1) + (2)^2 f(2) + (3)^2 f(3) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6} \\ &= \frac{36}{6} \\ &= 6 \end{aligned}$$

4) $\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \square$

$$\begin{aligned} &= 6 - \left(\frac{7}{3} \right)^2 \\ &= 6 - \frac{49}{9} \\ &= \frac{54 - 49}{9} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد (Tossing two die) إذا عرفنا المتغير العشوائي X على أنه مجموع الوجهين الظاهرين، أوجد التالي:

- 1- $X(\Omega)$
- 2- $E(X)$
- 3- Variance (X)

الحل:

$$1) \quad X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad E(X) &= \sum_{x=2}^{12} Xf(x) \\ &= (2)\left(\frac{1}{36}\right) + (3)\left(\frac{6}{36}\right) + (4)\left(\frac{3}{36}\right) + (5)\left(\frac{4}{36}\right) \\ &\quad + (6)\left(\frac{5}{36}\right) + (7)\left(\frac{6}{36}\right) + (8)\left(\frac{5}{36}\right) + (9)\left(\frac{4}{36}\right) \\ &\quad + (10)\left(\frac{3}{36}\right) + (11)\left(\frac{2}{36}\right) + (12)\left(\frac{1}{36}\right) \\ &= 7 \end{aligned}$$

3) Exercise

تمرين:

في تجربة رمي حجري النرد، إذا عرفنا المتغير العشوائي X على أنه الفرق المطلق للوجهين الظاهرين.

احسب $E(X)$ ، $\sigma^2(x)$

مثال:

محل لبيع الألبسة يربح في الأيام العادية عشرة دنانير في اليوم، وفي الأيام شديدة البرد يخسر خمسة دنانير، وفي أيام المواسم يربح مائة ديناراً.

فإذا علمت أن النسبة المئوية للأيام العادية وشديدة البرد والمواسم هي على الترتيب 60٪، 10٪، 30٪. فإذا اختير أحد الأيام عشوائياً (Randomly). احسب توقع ربحه في ذلك اليوم.

الحل:

| | | | | |
|------|-----|-----|-----|-------|
| X | 10 | -5 | 100 | Total |
| F(x) | 0.6 | 0.1 | 0.3 | 1 |

| | | | | |
|---------|---|------|----|------|
| $Xf(x)$ | 6 | -0.5 | 30 | 35.5 |
|---------|---|------|----|------|

توقع ربحه في ذلك اليوم = 35.5 دينار

نظرية: إذا كان X متغيراً عشوائياً فإن

$$E(ax+b) = aE(x) + b$$

حيث a, b عدداً حقيقيين.

البرهان (Proof)

$$\begin{aligned}
 E(ax+b) &= \sum_{x \in X(\Omega)} (ax+b)f(x) \\
 &= a \sum_{x \in X(\Omega)} Xf(x) + b \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \\
 &= aE(X) + b(1) \\
 &= aE(X) + b \quad \square
 \end{aligned}$$

مثال

إذا كان X متغيراً عشوائياً وكان $E(X)=5$

احسب $E(3X+1)$

الحل:

$$\begin{aligned}
 E(3X+1) &= 3E(x)+1 \\
 &= 3(5) + 1 \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

المتغير العشوائي المتصل (Continuous Random Variable)

تعريف: المتغير العشوائي المتصل X هو متغير عشوائي يكون مداه $X(\Omega)$ يحوي فترة .

ويدعى الاقتران $f(x)$ اقتران كثافة احتمالية (Probability density function) للمتغير العشوائي X إذا كان.

$$1) \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X(\Omega)$$

$$2) \quad \int_{X(\Omega)} f(x) dx = 1 \quad \square$$

مثال:

إذا كان X متغيراً عشوائياً مداه الفترة $[0,4]$ وكان $f(x) = \frac{1}{8}x$ بين أن $f(x)$ اقتران كثافة احتمالية (p.d.f).

الحل:

$f(x) \geq 0$ لكل x في الفترة $[0,4]$

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)dx &= \int_0^4 \frac{1}{8}x dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^2 \right]_0^4 \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ هو اقتران كثافة احتمالية (p.d.f)

مثال:

إذا كان $f(x) = Ae^{-x}$ فجد قيمة A التي تجعل $f(x)$ اقتران كثافة احتمالية (p.d.f) للمتغير العشوائي X الذي يأخذ قيم في $(0, \infty)$.

الحل:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} Ae^{-x} dx &= 1 \\ \Rightarrow \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L Ae^{-x} dx &= 1 \quad (\text{improper integral}) \\ \Rightarrow \lim_{L \rightarrow \infty} \left(-Ae^{-x} \Big|_0^L \right) &= 1 \\ \Rightarrow \lim_{L \rightarrow \infty} \left(-Ae^{-L} + A \right) &= 1 \\ \Rightarrow 0 + A = 1 &\Rightarrow A = 1\end{aligned}$$

تعريف:

إذا كان X متغير عشوائياً لا متصلاً مداه $X(\Omega)$ واقتران كثافته الاحتمالية $f(x)$ فإن
(1) توقع المتغير العشوائي X هو:

$$E(X) = \int_{x(\Omega)} Xf(x)dx$$

(2) العزم (K) للمتغير العشوائي X هو

$$E(X^k) = \int_{\Omega} X^k f(x)dx$$

التباين (Variance) للمتغير العشوائي المتصل (X) هو

$$\sigma^2(x) = E(X^2) - (E(x))^2$$

والجذر التربيعي للتباين $\sigma = \sqrt{E(X^2) - (E(x))^2}$ يسمى الانحراف المعياري.

مثال:

إذا كان X متغيراً عشوائياً واقتران كثافته الاحتمالية

$$f(x) = \frac{1}{8}x, \quad x \in [0,4]$$

احسب:

- 1) $E(x)$
- 2) $E(x^2)$
- 3) $\sigma^2(x)$

الحل:

$$\begin{aligned} 1) \quad E(X) &= \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8}x dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^4 x^2 dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^4 x^3 dx$$

$$2) \quad E(X^2) = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{1}{8} X dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^4 x^3 dx$$

$$= \frac{1}{32} \int_0^4 x^4 dx$$

$$\therefore E(x^2) = \frac{256}{32}$$

$$= 8$$

$$3) \quad \sigma^2(x) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$= 8 - \frac{64}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

تمرين:

للمتغير العشوائي X والذي يأخذ قيمة في الفترة $(0, \infty)$ واقتان كثافة الاحتمالية

$f(x) = e^{-x}$. احسب: variance (x)

نظرية:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً فإن

$$E(aX+b) = aE(X) + b \quad \forall a, b \in R$$

مثال:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً حيث $E(X) = 3$ احسب $E(Y)$ حيث $Y = 5X - 1$

الحل:

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= E(5X - 1) \\
 &= 5 E(X) - 1 \\
 &= (5) (3) - 1 \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

تعريف:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً، اقتران كثافة الاحتمالية (p.d.f) $f(x)$ فإناحتمال أي فترة من الفترات $[a,b]$ ، (a,b) ، $[a,b)$ ، $(a,b]$

يساوي

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

أي أن

$$\begin{aligned}
 P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) \\
 &= P(a \leq X < b) \\
 &= P(a < X < b)
 \end{aligned}$$

ملاحظة:

احتمال أي مجموعة منتهية لمتغير عشوائي متصل يساوي صفرًا.

مثال:

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً يأخذ قيمة في الفترة $[0, \infty)$ واقتران كثافته

الاحتمالية هو

$$f(x) = e^{-x}$$

احسب:

1. $P(0 \leq X < 1)$
2. $P(|X| < 2)$
3. $P\{0,1,2\}$

الحل:

$$\begin{aligned} 1) \quad P(0 \leq X < 1) &= \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} \Big|_0^1 \\ &= -e^{-1} + 1 \\ &= 0.632 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad P(|X| < 2) &= P(-2 < x < 2) \\ &= P(0 \leq x < 2) \\ &= \int_0^2 e^{-x} dx \\ &= 0.865 \end{aligned}$$

$$3) \quad P\{0,1,2\} = 0$$

تمارين

1- إذا كان $P(E_1) = \frac{2}{15}$ ، $P(E_2) = \frac{4}{15}$ وكان E_1 ، E_2 حادثين منفصلين (disjoint event). جد $P(E_1 \cup E_2)$ ؟

2- إذا كان E_1 ، E_2 حادثين مستقلين (Independent events) $P(E_1) = 0.15$ ، $P(E_2) = 0.4$ فجد

a) $P(E_1 \cap E_2)$

b) $P(E_1 \cup E_2)$

c) $P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2)$

d) $P(\bar{E}_1 \cup \bar{E}_2)$

3- كيس يحتوي (9) كرات سوداء، (6) كرات حمراء. سحب من الكيس كرة واحدة عشوائياً. احسب

a- احتمال أن تكون حمراء.

b- احتمال أن تكون سوداء.

c- احتمال أن تكون بيضاء.

4- كيس يحوي (9) كرات بيضاء، (11) كرة حمراء. سحب من الكيس كرتان على التوالي دون إرجاع (without replacement) عشوائياً. احسب احتمال أن تكون:

a- الكرتان حمراوتان.

b- الكرتان مختلفتان في اللون.

5- إذا كانت E_1 ، E_2 ، E_3 حوادث متباعدة وشاملة وكان $P(E_1) = 0.2$ ، $P(E_2) = 0.3$ ، احسب $P(E_3)$ ؟

6- إذا كانت E_1 ، E_2 ، E_3 ، E_4 حوادث متباعدة وشاملة وكان

$$P(E_1) = P(E_2) = 2P(E_3) = 2P(E_4)$$

$$P(E_1), P(E_2), P(E_3), P(E_4)$$

فأوجد

7- تقدم موظفان لأحد البنوك فإذا كان احتمال قبول الأول (0.7) واحتمال قبول

الثاني (0.6) احسب

a- قبول الاثنين معا.

b- قبول الأول أو الثاني.

c- قبول الأول وعدم قبول الثاني.

d- عدم قبول الاثنين.

8- إذا كان ، $P(A) = 0.65$ ، $P(B) = 0.8$ ، $P(A \cap B) = 0.55$

a) $P(A/B)$

b) $P(B/A)$

c) $P(\bar{A}/B)$

d) $P(A \cap \bar{B})$

e) $P(A-B)$

f) $P(A/A \cup B)$

g) $P(\bar{A}/\bar{B})$

9- صندوق يحوي 9 كرات حمراء، 6 كرات سوداء، 5 كرات بيضاء، سحب من

الكيس كرتان على التوالي بشكل عشوائي مع الإرجاع (with replacement) ما

احتمال:

أ- أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء.

ب- أن تكون الكرتان من نفس اللون.

ج- أن تكون الكرتان مختلفتان في اللون.

د- أن تكون إحدى الكرتين ليست سوداء.

10- أعد حل السؤال السابق إذا كان السحب دون إرجاع؟

11- صندوقان A، B يحوي A خمس كرات حمراء وسبع كرات سوداء. ويحوي B

ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء. سحبت كرة من الصندوق A عشوائياً

- ووضعت في الصندوق B، ثم سحب من الصندوق B كرتان عشوائياً دون إرجاع احسب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الصندوق B:
- a- همراء ثم سوداء .
- b- من نفس اللون.

12- إذا كان E_1 ، E_2 حادثين مستقلين، $P(E_1) = 2P(E_2)$ ، $P(E_1 \cup E_2) = \frac{5}{8}$ احسب $P(E_1)$

- 13- في رحلة لطائرة من عمان إلى جدة. إذا كان احتمال نفاد تذاكر الدرجة السياحية 80% واحتمال نفاد تذاكر الدرجة الأولى 70%. واحتمال نفاد تذاكر الدرجتين معا 65%. فإذا نفدت تذاكر الدرجة الأولى فما احتمال نفاد تذاكر الدرجة السياحية؟

- 14- تقدم طالب لامتحانين في الرياضيات والعلوم، فإذا كان احتمال نجاحه في الرياضيات 0.7، واحتمال نجاحه في العلوم إذا نجح في الرياضيات 0.8، احسب احتمال نجاحه في المادتين معا؟

- 15- لتحديد النسل يصف الأطباء من خلال أحد مراكز الأمومة ثلاث وسائل A، B، C لمنع الحمل. فإذا كانت نسبة اللاتي تستخدم هذه الوسائل هي 40%، 35%، 25% على الترتيب، وكانت نسبة الفشل في استخدام هذه الوسائل (كما حددها الأطباء) هي 5%، 2%، 1% على الترتيب. اختيرت إحدى النساء عشوائياً وكانت تستخدم إحدى هذه الوسائل . احسب احتمال أن تكون قد استخدمت الوسيلة B إذا علمت أنها حامل؟

- 16- متحف 60% من رواد عرب والباقي أجنبي. فإذا كانت نسبة الرواد الذكور من العرب 95%، ونسبة الرواد الذكور من الأجانب 20%، فإذا اختير أحد الرواد وكان عربياً فما احتمال أن تكون أنثى؟

17- سائق تكسي يحمل في جعبته ثلاثة دنائير قطع معدنية فإذا كان الدينار الأول من فئة الخمسة قروش والدينار الثاني من فئة العشرة قروش أما الثالث فكانت من فئة الربع دينار. إذا سحب السائق من الجعبة قطعتان نقديتان معا ودل المتغير العشوائي X على قيمة القطعتين، احسب:

a- مدى X .

b- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

c- $E(x)$.

اعتبر جميع الفئات النقدية لها نفس فرصة الاختيار

18- إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x .

| | | | |
|----------|---|----|---|
| X | 1 | 2 | 3 |
| $P(X=x)$ | a | 2a | b |

وكان $E(x) = 2.2$ احسب قيمة كل من a, b ؟

19- إذا كان توقع ربح شخص في مسابقتين له نفس القيمة، وكانت قيمة الجائزة الأولى (250) ديناراً واحتمال الحصول عليها $\left(\frac{2}{5}\right)$ مما مقدار الجائزة الثانية إذا

كان احتمال الحصول عليها $\frac{4}{5}$ ؟

20- إذا كان X متغيراً عشوائياً يأخذ قيمه في المجموعة $\{0,1,2\}$ وكان اقتران احتماله

هو $f(x) = \frac{1}{5}x^2$. احسب $E(x)$ ؟

21- إذا كان X متغيراً عشوائياً يأخذ قيمه في الفترة $[0,2]$ وكان اقتران كثافته

الاحتمالية $f(x) = bx - 2$. جد $E(X)$ ؟

22- إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو

$\{(-4,a), (3,4a), (0,7a)\}$ فجد قيمة a ؟

23- صف به (10) أولاد (5) بنات. إذا اختير عشوائياً (Randomly) ثلاثة طلاب على التوالي. احسب احتمال:

a- أن يكون الأول والثاني ولدين والثالثة بنتاً.

b- أن يكون الأول والثالث ولدين والثانية بنتاً.

c- أن يكون الأول والثالث من الجنس نفسه والثاني من الجنس الآخر.

24- الصندوق A يحوي (5) كرات حمراء، (3) بيضاء، (8) زرقاء. أما الصندوق B فيحوي (3) كرات حمراء، (5) بيضاء. إذا أُلقي حجر نرد منتظمة فإننا نسحب كرة من صندوق B إذا ظهر الوجه (3) أو (6). وغير ذلك نسحب كرة من الصندوق A.

a- احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

b- إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق A.

25- صندوق يحوي قطعتي نقد إحداهما منتظمة والأخرى على وجهيها صور. فإذا سُحب عشوائياً قطعة منها وأُلقيت، فإنه إذا ظهر صورة نلقي القطعة الأخرى، أما إذا ظهر كتابة فنلقي نفس القطعة مرة أخرى. احسب احتمال:

a- ظهور صورة في الرمية الثانية.

b- إذا ظهر في الرمية الثانية صورة. فما احتمال أن تكون قد ظهرت صورة في الرمية الأولى.

26- في تجربة رمي حجري النرد، إذا دلّ المتغير العشوائي X على أنه العدد الأكبر للوجهين الظاهرين، أو أحدهما إذا كانا متساويين. احسب توقع X.

27- عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة يربح شخص مبلغاً من الدنانير مساوياً لعدد نقاط الوجه الظاهر إذا كان الوجه الظاهر عدد أولي، ويخسر دنانير مساوية لعدد النقاط الظاهرة على وجه حجر النرد إذا ظهر عدد غير أولي. احسب توقع ربح هذا الشخص.

28- إذا كان X متغيراً عشوائياً، اقتران كثافته الاحتمالية

$$f(x) = \frac{1}{6}x + a, \quad x \in [0,3]$$

a- قيمة

b - $P(1 \leq X \leq 2)$

c - $E(X)$

d - $P(X^2 < 4)$

e - $P\{1,2\}$

f - $E(16X)$

29- إذا كان الفضاء العيني لتجربة عشوائية $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ، p اقتران احتمال

$$P(\{a_2\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$$

بحيث احسب $P(\{a_1\})$

30- ستة رجال وزوجاتهم في غرفة، اختير منهم شخصين عشوائياً. احسب احتمال

أن يكون الشخصين:

a- زوج وزوجته b- مختلفين في الجنس

31- في السؤال السابق، إذا اختير أربعة أشخاص، احسب احتمال أن يكون

a- هؤلاء عائلتين كل عائلة مكونة من زوج وزوجته.

b- لا يوجد أية عائلة بينهم.

c- بينهم عائلة واحدة فقط.

32- إذا كان A ، B مستقلين بحيث أن $P(A)=k$ ، $P(B)=k+0.2$ ، $P(A \cap B)=0.15$

a- احسب قيمة k .

b - $P(A \cup B)$

c - $P(\bar{A}/\bar{B})$

6

الوحدة السادسة

التوزيعات الاحتمالية

Probability Distributions

التوزيعات الاحتمالية Probability Distributions

مقدمة

يسمى التوزيع الاحتمالي الذي متغير العشوائي منفصلاً توزيع احتمالي منفصل أما التوزيع الذي متغيره العشوائي متصلاً فيسمى توزيعاً احتمالياً متصلاً. وستتعرف في هذه الوحدة على توزيعات احتمالية مهمة منها ما هو منفصل ومنها ما هو متصل.

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة Discrete Probability distributions

1 - توزيع ذات الحدين Binomial distribution

تعالج نظرية ذات الحدين ذلك النوع من التجارب التي تتكرر عدد محدود من المرات وتكون نتيجتها في المرة الواحدة إما نجاح أو فشل.
نظرية:

إذا أجريت تجربة (n) مرة، وكان احتمال نجاحها في المرة الواحدة هو (p)، ودل المتغير العشوائي x على عدد مرات النجاح فإن احتمال النجاح التجربة في x مرة هو

$$1. \quad P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$2. \quad E(X) = np \quad \text{توقع المتغير العشوائي } X \text{ هو}$$

$$3. \quad \sigma^2(X) = npq \quad \text{تباين المتغير العشوائي } X \quad \square$$

مثال:

إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو (0.9) فإذا أجريت العملية لعشرة مرضى احسب ما يلي:

- a- احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى.
 b- احتمال نجاح العملية لجميع المرضى.
 c- احتمال نجاح العملية لثمانية مرضى على الأقل.
 d- احتمال نجاح العملية لثمانية مرضى على الأكثر.
 e- توقع عدد المرضى الذين سيجرون العملية بنجاح.
 f- تباين عدد المرضى الذين سيجرون العملية.

الحل:

$$n=10, \quad p=0.9$$

$$P(x) = \binom{10}{x} (0.9)^x (0.1)^{10-x}, x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

$$a) \quad P(7) = \binom{10}{7} (0.9)^7 (0.1)^3$$

$$b) \quad P(10) = \binom{10}{10} (0.9)^{10} (0.1)^0 \\ = (0.9)^{10}$$

$$c) \quad P(X \geq 8) = [P(8) + P(9) + P(10)] \\ = \sum_{x=8}^{10} \binom{10}{x} (0.9)^x (0.1)^{10-x}$$

$$d) \quad P(X \leq 8) = P(0) + P(1) + \dots + P(8) \\ = \sum_{x=0}^8 \binom{10}{x} (0.9)^x (0.1)^{10-x}$$

حل آخر:

$$P(x \leq 8) = 1 - [P(x = 9) + P(x = 10)] \square$$

$$= 1 - \sum_{x=9}^{10} \binom{10}{x} (0.9)^x (0.1)^{10-x}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } E(X) &= np \\ &= (10)(0.9) \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \sigma^2(f) &= npq = (10)(0.9)(0.1) \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

مثال:

ألقي حجر نرد إحدى وخمسون مرة، إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات الحصول على عدد يقبل القسمة على (3). احسب

(a) احتمال نجاح التجربة (الحصول على عدد يقبل القسمة على (3)) عدد من المرات لا يقل عن (20) ولا يزيد عن (30).

(b) احتمال عدم نجاح التجربة.

(c) $E(X)$

(d) $\sigma(X)$

الحل:

$$n = 51, P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(x) = \binom{51}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{51-x} \quad \square$$

$$\text{a) } P(20 \leq x \leq 30) = \sum_{x=20}^{30} \binom{51}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{51-x}$$

$$\text{b) } P(0) = \binom{51}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{51} = \left(\frac{2}{3}\right)^{51}$$

\square

$$\text{c) } E(X) = 51 \times \frac{1}{3} = 17$$

$$d) \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{(51)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \sqrt{11.3} = 3.36$$

2- توزيع بواسون Poisson Distribution

يهتم توزيع بواسون في تلك التجارب التي تحدث خلال فترة زمنية أو مكانية محددة كدراسة عدد المكالمات التي تصل مقسم ما خلال ساعات الدوام. أو دراسة عدد حوادث السير عند تقاطع معين خلال أسبوع معين. فإذا كان معدل النجاح في فترة زمنية (مكانية) محددة هو (λ) فيكون احتمال بواسون معطى بالعلاقة

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

ويكون توقع بواسون $E(x) = \lambda$

وتباين بواسون $\sigma^2 = \lambda$

ويمكن تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع بواسون بوضع $\lambda = np$ إذا كان (n) كبيرة جداً و (p) صغيرة جداً.

مثال:

إذا كان متوسط عدد الأيام التي تمطر فيها في شهر شباط هي ثلاثة أيام في الأسبوع. فما احتمال أن تمطر خمسة أيام في الأسبوع في ذلك الشهر.

الحل:

$$\lambda = np$$

$$x = 5$$

$$\lambda = 3$$

$$\therefore P(5) = \frac{e^{-3} 3^5}{5!} = \frac{(0.05)(729)}{120} = 0.3$$

التوزيعات الاحتمالية المتصلة

Continuous Probability distributions

1 - التوزيع الطبيعي: Normal distribution

قبل البدء بموضوع التوزيع الطبيعي لتتعرف على مفهوم العلامة المعيارية.

العلامات المعيارية Standard mark

تعريف: إذا كان لدينا مجموعة من المفردات وسطها الحسابي \bar{X} وانحرافها المعياري σ وإذا كانت X مفردة ما تسمى العلامة الخام Row mark فإن العلامة المعيارية Z المناظرة لها هي:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

وتستخدم العلامات المعيارية لمقارنة علامتين من توزيعين مختلفين، فتكون المقارنة أكثر عدالة.

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات (50) والانحراف المعياري (10) فأوجد:

- 1 - العلامة المعيارية المناظرة للعلامة الخام 60.
- 2 - العلامة المعيارية المناظرة للعلامة الخام 45.
- 3 - العلامة المعيارية المناظرة للوسط الحسابي.
- 4 - العلامة الخام المناظرة للعلامة المعيارية 1.5.

الحل:

$$\bar{X} = 50, \sigma = 10$$

$$1) \quad Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$2) \quad = \frac{60 - 50}{10} = 1$$

$$= \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$

$$3) \quad Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$= \frac{50 - 50}{10} = 0$$

$$4) \quad Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$\Rightarrow 1.5 = \frac{x - 50}{10}$$

$$\Rightarrow 15 = x - 50 \Rightarrow x = 65$$

مثال:

طالب في شعبة A علامته في مادة الإحصاء 60، وطالب آخر في شعبة B علامته في الإحصاء 70، فإذا علمت أن الوسط الحسابي لعلامات طلبة شعبة A في الإحصاء (65) والانحراف المعياري لها (5) أما طلبة شعبة B فالوسط الحسابي لعلاماتهم في الإحصاء (85) والانحراف المعياري لها (10) فأَي الطالبين تحصيله أفضل في الإحصاء هل هو طالب شعبة A. أم طالب شعبة B.

الحل:

$$\text{شعبة A: } \bar{x} = 65, \sigma = 5, x = 60$$

إذن فالعلامة المعيارية للطالب الموجود في شعبة A هي:

$$Z_A = \frac{60 - 65}{5}$$

$$= -1$$

$$\bar{x} = 85, \sigma = 10, x = 70$$

شعبة B:

$$Z_B = \frac{70 - 85}{10}$$

$$= -1.5$$

النتيجة : $-1 < -1.5$ أي أن العلامة المعيارية للطالب الموجود في شعبة B أصغر من نظيرتها للطالب الموجود في شعبة A. وبالتالي تحصيل الطالب الموجود في شعبة A أفضل في الإحصاء من تحصيل نظيره الموجود في شعبة B.

مثال:

أحمد وعثمان طالبان في الصف الأول الثانوي العلمي، فإذا كانت علامة أحمد في الرياضيات هي (72) والعلامة المعيارية لها هي (1.5)، وكانت علامة عثمان في نفس المادة (80) والعلامة المعيارية المقابلة لها (2.5). احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لطلاب الصف في مادة الرياضيات؟

الحل:

$$\text{أحمد: } X_1=72, Z_1=1.5$$

$$\text{عثمان: } X_2=80, Z_2=2.5$$

$$Z_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 1.5 = \frac{72 - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 1.5\sigma + \bar{x} = 72 \dots\dots\dots(1)$$

$$Z_2 = \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 2.5 = \frac{80 - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 2.5\sigma + \bar{x} = 80 \dots\dots\dots(2)$$

بحل المعادلتين (1)، (2) ينتج أن

$$\bar{x} = 60 \quad \text{الوسط الحسابي}$$

$$\sigma = 8 \quad \text{والانحراف المعياري}$$

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

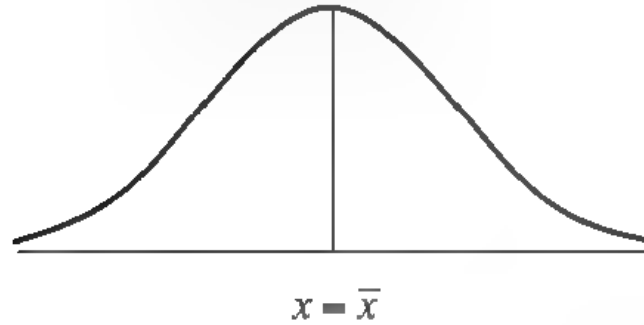
التوزيع الطبيعي هو ذلك التوزيع الذي يكون متغيرة العشوائي متصل واقتران كثافته الاحتمالية هو:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

e = العدد النيبيري

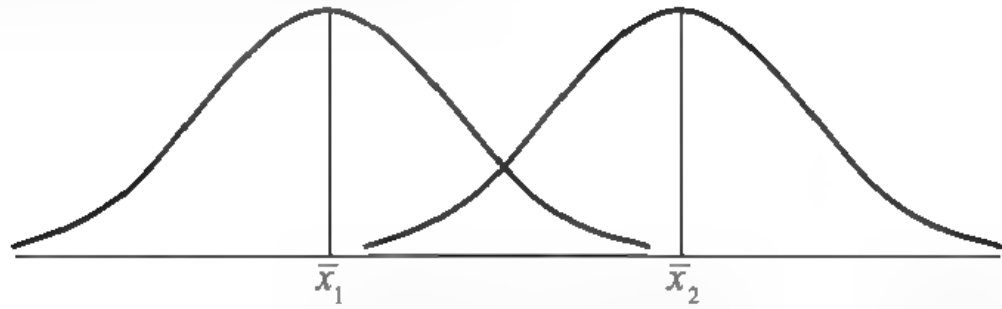
π = النسبة التقريبية

ويكون الوسط الحسابي للمتغير العشوائي هو \bar{x} والانحراف المعياري σ ومنحناه يأخذ شكل الناقوس المقلوب كما هو في الشكل التالي:

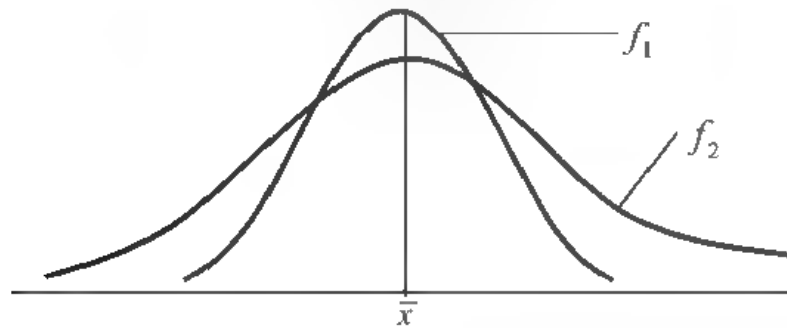


خصائص التوزيع الطبيعي:

- 1- منحناه يأخذ شكل الناقوس المقلوب ويمتد من طرفيه إلى $-\infty$ ، ∞ .
- 2- المساحة المحصورة بين منحنى اقتران كثافته الاحتمالية ومحور السينات تساوي وحدة مربعة واحدة.
- 3- يكون المنحنى متماثلاً حول المستقيم $x = \bar{x}$.
- 4- أحادي المنوال.
- 5- الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- 6- بتغير \bar{x} وثبات σ يتحرك المنحنى أفقياً يميناً أو يساراً كما هو موضح في الشكل التالي:



7- كلما ازدادت σ وبقيت \bar{x} ثابتة فإن المنحنى \bar{x} يبتعد أكثر عن الوسط الحسابي من الجهتين. كما هو موضح في الشكل التالي:



f_1 يرتبط بالانحراف المعياري σ_1

f_2 يرتبط بالانحراف المعياري σ_2 وتكون $\sigma_1 < \sigma_2$

8- التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (صفرًا) وانحرافه المعياري (1) يسمى توزيعاً طبيعياً معيارياً.

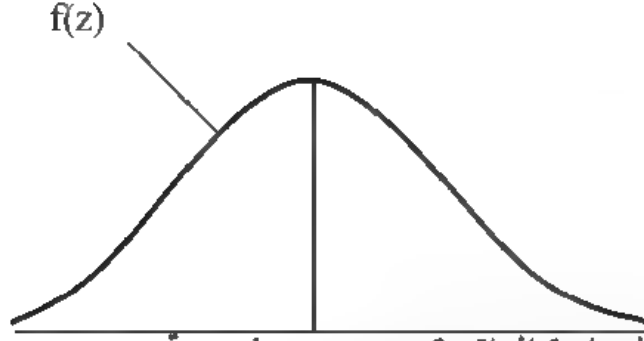
9- يمكن تحويل أي توزيع طبيعي وسطه الحسابي x وانحرافه المعياري σ إلى توزيع

$$\text{طبيعي معياري باستخدام العلاقة } z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}.$$

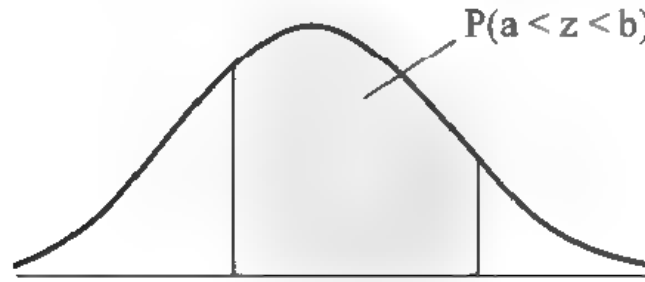
التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

التوزيع الطبيعي المعياري هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (صفر) وانحرافه المعياري (1) ويكون اقتران كثافته الاحتمالية هو:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < Z < \infty$$



سنرمز لنسبة المساحة الواقعة بين $z=a$ ، $z=b$ وتحت منحنى التوزيع الطبيعي وفوق محور x بالرمز $P(a < z < b)$.



ملاحظة:

$$\begin{aligned} P(a \leq z \leq b) &= P(a < z < b) \\ &= P(a < z \leq b) \\ &= P(a \leq z < b) \end{aligned}$$

وذلك لأن المساحة الواقعة فوق نقطة تساوي صفراً.

أما عن كيفية إيجاد نسبة المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي المعياري وأي قيمتين فنستخدم جداول خاصة ملحقة بنهاية الكتاب. تعطي نسبة المساحة الواقعة بين $z=0$ وأية قيمة موجبة. وباستخدام خصائص المنحنى الطبيعي يمكننا إيجاد نسبة المساحة المطلوبة.

مثال:

أوجد:

1) $P(0 < z < 1)$

- 2) $P(0 < z < 1.5)$
- 3) $P(0 < z < 1.25)$

الحل:

جميع هذه النسب نجدها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري الموجود في الملحق رقم (2) مباشرة.

- 1) $P(0 < z < 1) = 0.3413$
- 2) $P(0 < z < 1.5) = 0.4332$
- 3) $P(0 < z < 1.25) = 0.3944$

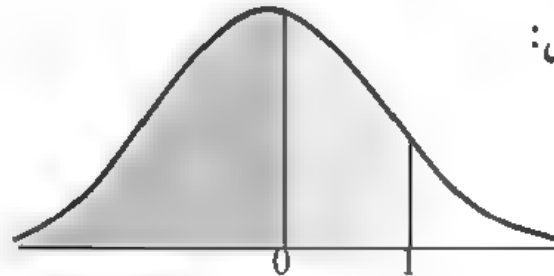
مثال:

أوجد:

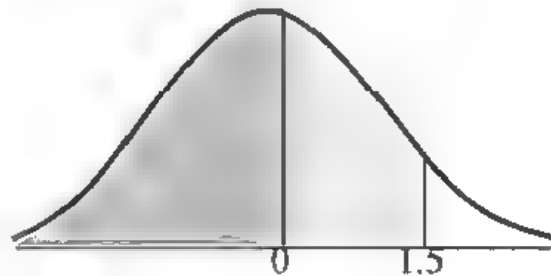
- 1) $P(z < 1)$
- 2) $P(z < 1.5)$

الحل:

- 1) $P(z < 1) = 0.5 + P(0 < z < 1)$
 $= 0.5 + 0.3413$
 $= 0.8413$



- 2) $P(Z < 1.5) = 0.5 + P(0 < Z < 1.5)$
 $= 0.5 + 0.4332$
 $= 0.9332$

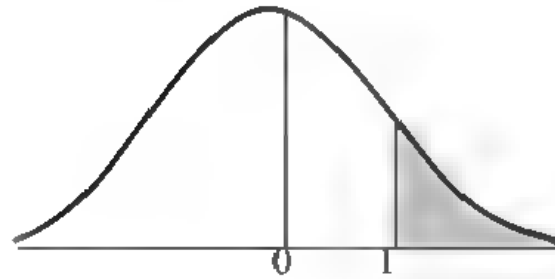


مثال :

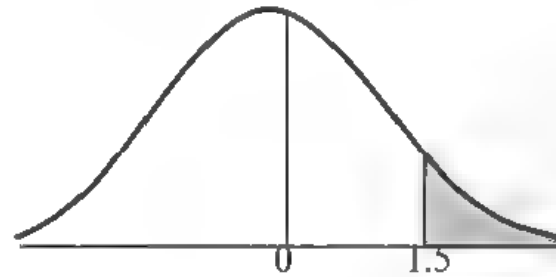
- أوجد 1) $P(Z > 1)$ 2) $P(Z > 1.5)$

الحل:

$$\begin{aligned}
 1) P(z > 1) &= 0.5 - P(0 < Z < 1) \\
 &= 0.5 - 0.3413 \\
 &= 0.1587
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2) P(z > 1.5) &= 0.5 - P(0 < z < 1.5) \\
 &= 0.5 - 0.4332 \\
 &= 0.0668
 \end{aligned}$$



مثال:

أوجد:

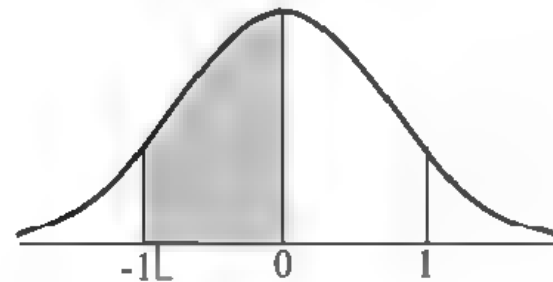
$$1) p(-1 < z < 0)$$

$$2) p(-2 < z < 0)$$

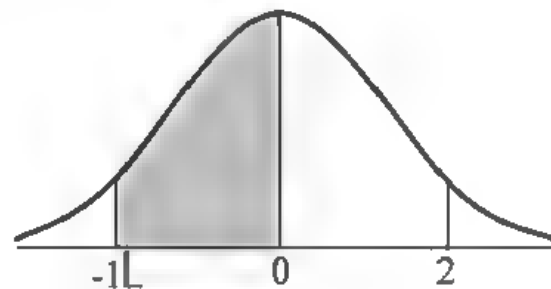


الحل: من تئاتل المنحنى

$$\begin{aligned}
 1) P(-1 < z < 0) &= P(0 < Z < 1) \\
 &= 0.3413
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2) P(-2 < Z < 0) &= P(0 < Z < 2) \\
 &= 0.4772
 \end{aligned}$$



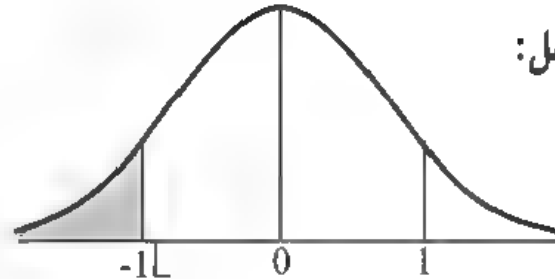
مثال:

أوجد :

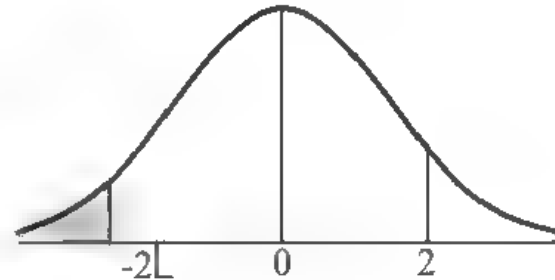
1) $p(z < -1)$

2) $p(z < -2)$

الحل:



$$\begin{aligned} 1) P(z < -1) &= P(z > 1) \\ &= 0.5 - p(0 < z < 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2) P(Z < -2) &= P(Z > 2) \\ &= 0.5 - p(0 < Z < 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

مثال:

□ أوجد

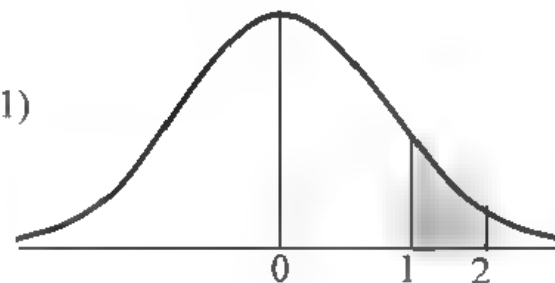
1- $P(1 < z < 2)$

2- $P(0.5 < z < 1.5)$

3- $P(-2 < z < -1.5)$

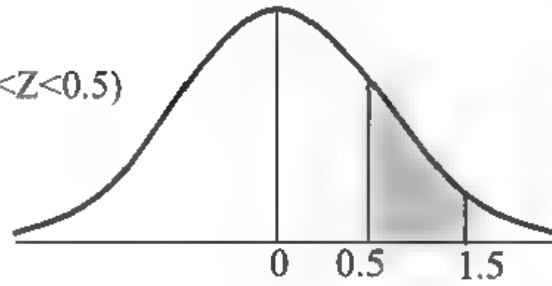
4- $P(-1 < z < -0.5)$

الحل:

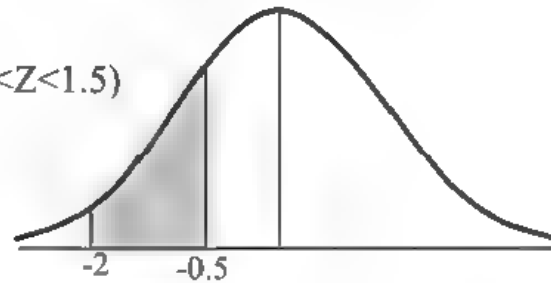


$$\begin{aligned} 1) P(1 < Z < 2) &= P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 1) \\ &= 0.4772 - 0.3413 \\ &= 0.1359 \end{aligned}$$

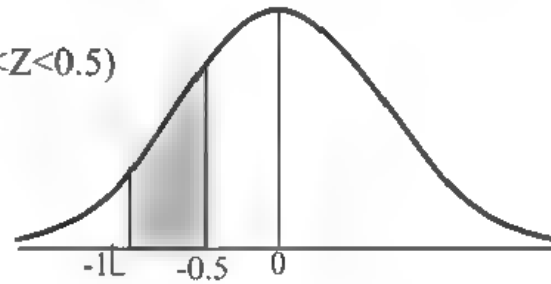
$$\begin{aligned} 2) \quad P(0.5 < Z < 1.5) &= P(0 < z < 1.5) - P(0 < Z < 0.5) \\ &= 0.4332 - 0.1915 \\ &= 0.2417 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3) \quad P(-2 < Z < -1.5) &= P(1.5 < Z < 2) \\ &= P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 1.5) \\ &= 0.4772 - 0.4332 \\ &= 0.044 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 4) \quad P(-1 < Z < -0.5) &= P(0.5 < Z < 1) \\ &= P(0 < Z < 1) - P(0 < Z < 0.5) \\ &= 0.3413 - 0.1915 \\ &= 0.1498 \end{aligned}$$



مثال:

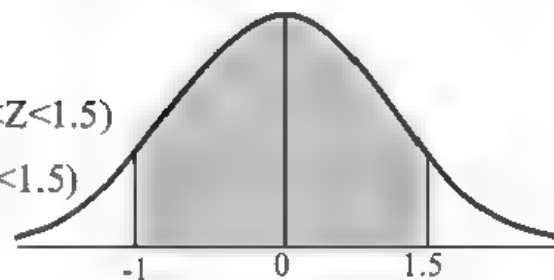
أوجد:

$$1) \quad P(-1 < Z < 1.5)$$

$$2) \quad P(|Z| < 2)$$

الحل:

$$\begin{aligned} 1) \quad P(-1 < Z < 1.5) &= P(-1 < Z < 0) + P(0 < Z < 1.5) \\ &= P(0 < Z < 1) + P(0 < Z < 1.5) \\ &= 0.3413 + 0.4332 \end{aligned}$$



$$= 0.7745$$

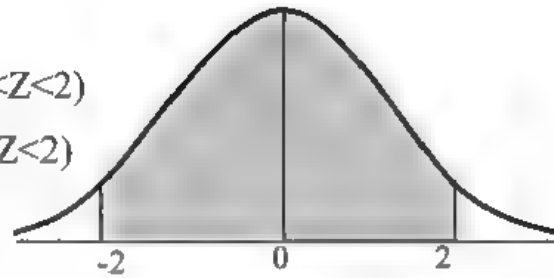
$$2) P(|Z| < 2) = P(-2 < Z < 2)$$

$$= P(-2 < Z < 0) + P(0 < Z < 2)$$

$$= P(0 < Z < 2) + P(0 < Z < 2)$$

$$= 0.4772 + 0.4772$$

$$= 0.9544$$



مثال:

أوجد قيمة a بحيث أن $P(0 < Z < a) = 0.4251$

الحل:

بعد البحث في جدول التوزيع الطبيعي المعياري ضمن المساحات نجد $a = 1.44$.

مثال:

أوجد قيمة a بحيث أن $P(Z < a) = 0.8413$

الحل:

قيمة a التي تحقق العلاقة $P(Z < a) = 0.8413$ هي نفس قيمة a التي تحقق العلاقة

$P(0 < Z < a) = 0.3413$ لماذا؟ ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن $a = 1$.

مثال:

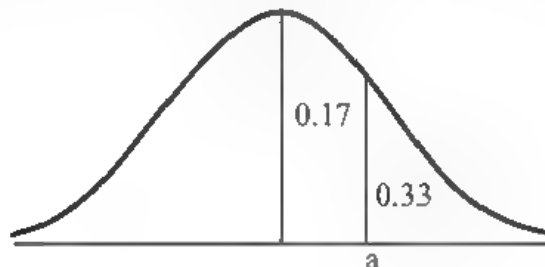
أوجد a بحيث أن $P(Z > a) = 0.33$

الحل:

قيمة a التي تحقق العلاقة $P(Z > a) = 0.33$ هي نفس قيمة a التي تحقق العلاقة

$P(0 < Z < a) = 0.17$ ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن

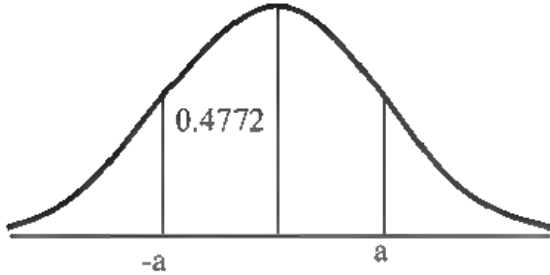
$$a = 0.44 \square$$



مثال:

أوجد قيمة a بحيث $P(a < Z < 0) = 0.4772$

الحل:

 $P(-a < Z < 0) =$ التي تحقق العلاقة0.4772 هي نفس a التي تحقق العلاقة

$$P(-a < Z < 0) = 0.4772$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي

المعياري نجد أن $-a = 2$ ومنها $a = 2$

مسائل عملية على التوزيع الطبيعي

نعيد التذكير في أنه لتحويل أي توزيع طبيعي وسطه الحسابي \bar{x} وانحرافه المعياري σ إلى توزيع طبيعي معياري، فإننا نستخدم العلاقة

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

مثال:

تتخذ أطوال (1000) طالب توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (160cm) وانحرافه

المعياري (10cm).

أوجد:

- 1- نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن 170cm.
- 2- النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180cm.
- 3- النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 165cm, 175cm.
- 4- عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175cm.

الحل:

$$n = 1000 \quad \bar{x} = 160\text{cm} \quad , \quad \sigma = 10\text{cm}$$

1- نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن 170 cm.

$$P(X < 170) = P\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma} < \frac{170 - \bar{x}}{\sigma}\right)$$

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \quad \text{لكن}$$

إذاً: نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن 170cm هي:

$$P\left(Z < \frac{170 - 160}{10}\right)$$

$$= P(Z < 1)$$

$$= 0.5 + p(0 < Z < 1) = 0.8413$$

إذاً: نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن 170cm تساوي (0.8413)

2- نسبة الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180cm هي:

$$P(x > 180)$$

$$= P\left(Z > \frac{180 - 160}{10}\right)$$

$$= P(Z > 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772$$

$$= 0.0228$$

إذاً: فالنسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180cm تساوي

$$0.0228 \times 100\%$$

$$= 2.28\% \square$$

3- نسبة الطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 165cm, 175cm هي

$$p(165 < x < 175) = P\left(\frac{165 - 160}{10} < Z < \frac{175 - 160}{10}\right)$$

$$= P(0.5 < Z < 1.5)$$

$$= P(0 < Z < 1.5) - P(0 < Z < 0.5)$$

$$= 0.4332 - 0.1915$$

$$= 0.2417$$

إذن النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 175cm , 105cm تساوي 24.17%

4- لإيجاد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175cm، نجد نسبتهم ونضربها في عدد الطلبة الكلي، أي أن عدد الطلبة المطلوب = نسبتهم × عدد الطلبة الكلي.

نسبة الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 cm هي:

$$P(X > 175) = P\left(Z > \frac{175 - 160}{10}\right)$$

$$= P(Z > 1.5)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z < 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332$$

$$= 0.0668 \square$$

إذن فعدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175cm يساوي:

$$0.0668 \times 1000$$

$$= 66.8$$

$$\approx 67 \square$$

مثال:

إذا كان علامات طلبة الثانوية العامة في أحد الأعوام، تتخذ توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (65) وانحرافه المعياري (15). فإذا علمت أن الجامعات الرسمية قبلت على المعدل التنافسي 10٪ من هؤلاء الطلبة. فما هو أدنى معدل قبل في الجامعات الرسمية حسب المعدل التنافسي؟

أأل:

$$x = 65 , \sigma = 15$$

لأأأاء أءى علامه معارفه قبلأ فف
الأامعات الرسمفة لئفرضها a ففكون

$$P(Z < a) = 0.10$$

وقفمة a أفف أأقق العلاقة السابقة

هف نفس قفمة a

$$P(0 < Z < a) = 0.4$$

الآن نأأأ فف أءول أوءزفع الطفففف عن المساحة (0.4000) فلا نأأأها لألك
نأأأ أأرب قفمة لها وهف (0.3997) وبأأالف فإن $a = 1.28$ وهأه هف أءى علامه
معارفه قبلأ فف الأامعات الرسمفة ولأأوفلها إلى علامه أأام نساءأم العلاقة

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \Rightarrow 1.28 = \frac{x - 65}{15}$$

$$\Rightarrow x - 65 = 1.28 \times 15$$

$$\Rightarrow x - 65 = 19.2$$

$$\Rightarrow x = 65 + 19.2 = 84.2$$

(أف أءى علامه قبلأ فف الأامعات الرسمفة أأب المءل أأافسف هف 84.2)

مأال:

بالاعأماء على المأال السابق، أأسب

$$a- P_{40}$$

$$b- Q_3 \text{ الرفع أأال } Q_3$$

أأل:

$$a) \quad \bar{X} = 65 , \sigma = 15$$

P_{40} هو العلامة أفف فقل عنها أو فساوفا 40% من العلامات وفقابل معارفا

$$P(Z < a) = 40\%$$

$$= 0.4000$$

القفمة a وأفف أأقق

a التي تحقق العلاقة $P(Z < a) = 0.4000$ هي نفس a التي تحقق العلاقة

$$P(a < Z < 0) = 0.1000$$

$$\Rightarrow a = -0.25$$

$$\therefore -0.25 = \frac{P_{40} - 65}{15}$$

$$\Rightarrow P_{40} = 61.25$$

الربع الثالث $P_{75} = 75.05$ "تأكد من ذلك"

b)

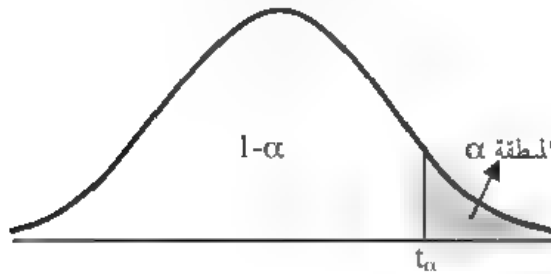
2- توزيع t: (t Distribution)

يشبه توزيع t التوزيع الطبيعي حيث يكون متماثل حول الوسط الحسابي الذي يساوي صفر ($t=0$) حيث يكون اقتران الكثافة الاحتمالية له هو:

$$f(t) = c \left(1 + \frac{t^2}{\gamma} \right)^{-\gamma + \frac{1}{2}} \quad -\infty < t < \infty$$

ويسمى أيضاً توزيع ستيودانت (Student's distribution) حيث تمثل γ درجات

الحرية df (degree of freedom)



كما نلاحظ هنا فإن شكل توزيع t

يشبه التوزيع الطبيعي وله نفس

الخصائص حيث يمتد من طرفيه من $-\infty$

إلى ∞ ومتماثل حول محور الوسط. $P(t > t_\alpha) = \alpha$

والمساحة تحته = وحدة مربعة واحدة.

ولكنه يختلف عن التوزيع الطبيعي في كون قيمة تعتمد على درجات الحرية (df).

ولإيجاد قيمة t نجد درجات الحرية وهي ($df = n - 1$) ونجدها من الجدول المخصص

لها بحيث تكتب على الصورة $t[df, \alpha]$.

مثال: احسب قيمة $t[15, 0.05]$

الحل: نجد قيمة t مباشرة من الجدول حيث

$$t [15, 0.05] = 1.753$$

ملاحظة: إذا كانت قيمة α غير موجودة في الجدول نستخدم العلاقة

$$t [df, \alpha] = -t[df, 1-\alpha]$$

مثال: احسب قيمة t فيما يلي:

1) $t[29, 0.025]$

2) $t[29, 0.001]$

3) $t[25, 0.95]$

4) $t[3, 0.995]$

الحل:

1) $t[29, 0.025] = 2.045$

2) $t[29, 0.001] = 3.396$

3) $t[25, 0.95] = -t [25, 1-0.95]$
 $= -t[25, 0.05] = -1.708$

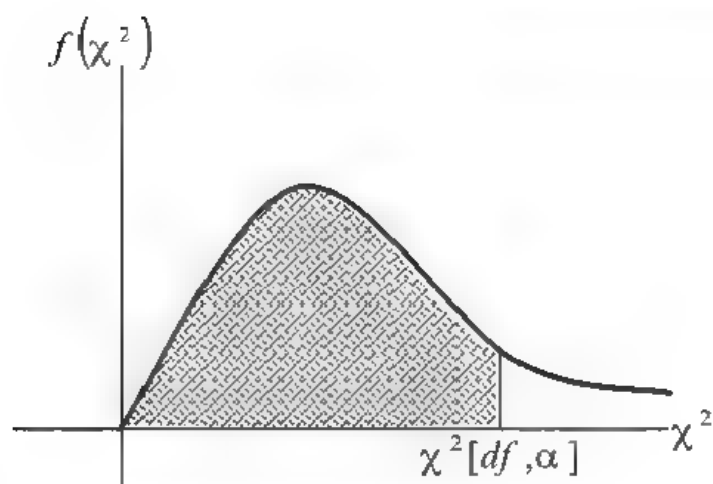
4) $t[3, 0.995] = -t[3, 0.005]$
 $= -0.5841$

3- توزيع كاي تربيع: χ^2 distribution

إن توزيع χ^2 من التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يكون اقتران كثافته الاحتمالية معطى بالعلامة

$$f(\chi^2) = c(\chi^2)^{(r-c)/2} e^{-\chi^2/2}, \quad \chi^2 > 0$$

ومن هنا نرى أن منحنى χ^2 يكون في الموجب فقط حيث يكون منحناه على الصورة.



ويعطي الجدول قيمة χ^2 التي على يسارها مساحة α ودرجات حرية df .

مثال:

احسب قيمة χ^2 في كل مما يلي:

- 1) $\chi^2 [20, 0.99]$
- 2) $\chi^2 [15, 0.05]$
- 3) $\chi^2 [2, 0.975]$

الحل:

- 1) $\chi^2 [20, 0.99] = 8.2604$
- 2) $\chi^2 [15, 0.05] = 24.9958$
- 3) $\chi^2 [2, 0.975] = 0.0506356$

تمارين

1- إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة ما في مادة الرياضيات (60) والانحراف المعياري (5)، وكان الوسط الحسابي لهذه الشعبة في مادة الفيزياء (70) والانحراف المعياري (10) فإذا كانت علامتي أحد طلاب هذه الشعبة في الرياضيات والفيزياء (65)، (75) على الترتيب فهل تحصيل الطالب في الفيزياء أفضل من الرياضيات؟

2- أوجد نسبة المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري فيما يلي:

- | | |
|-------------------------|------------------|
| a) $P(Z < 2.25)$ | b) $P(Z > 1.7)$ |
| c) $P(Z < 1)$ | d) $P(Z > 2)$ |
| e) $P(-1.2 < Z < 1.78)$ | f) $P(Z < -1.8)$ |

3- أوجد نسبة المساحة تحت المنحنى الطبيعي فيما يلي:

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a) $P(0.25 < Z < 1.7)$ | b) $P(-1.5 < Z < -0.05)$ |
| c) $P(4Z < 1.6)$ | d) $P(Z^2 < Z)$ |
| e) $P(Z^2 < Z+2)$ | f) $P(Z^2 > Z+2)$ |
| g) $P(1 < Z < 2)$ | |

4- أوجد قيمة a التي تحقق العلاقات في كل مما يلي:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $P(Z > a) = 0.0606$ | b) $P(Z < a) = 0.9938$ |
| c) $P(Z < a) = 0.663$ | d) $P(Z < a) = 0.287$ |

5- إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي \bar{x} ، وانحرافها المعياري σ . وكانت Z_1, Z_2, \dots, Z_n العلامات المعيارية المناظرة لتلك المشاهدات. فأثبت أن:

$$a) \quad \bar{Z} = 0 \Rightarrow \sum_{r=1}^n Z_r = 0$$

$$b) \quad \sigma_z = 1 \square$$

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\bar{X}}{\sigma} \quad \text{إرشاد:}$$

6- يتخذ الزمن اللازم لإنهاء (1000) طالب امتحانهم توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (60) دقيقة وانحرافه المعياري (10) دقائق.

a) أوجد عدد الطلبة الذين ينهون الامتحان خلال أول (50) دقيقة من بدء الامتحان.

b) ما هي الفترة الزمنية اللازمة حتى يكون (800) طالباً قد أنهوا امتحانهم خلالها.

7- إذا كان بيع أحد المتاجر اليومي يتخذ توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (300) دينار وانحرافه المعياري (20) دينار. احسب النسبة المئوية للأيام التي يزيد فيها بيع المتجر عن (320) دينار لليوم الواحد.

8- قرية تتكون من (10000) أسرة، يتخذ دخل الأسرة في هذه القرية توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (150) ديناراً وانحرافه المعياري (30) ديناراً أوجد:

a) النسبة المئوية للأسر التي يزيد دخلها عن (195) دينار في هذه القرية.

b) عدد الأسر التي تتراوح دخولهم بين (120) دينار، (180) دينار.

9- إذا كان زمن التشغيل لأحد أنواع البطاريات الجافة يتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي (150) ساعة تشغيل، وانحراف معياري (25) ساعة تشغيل. احسب:

a) النسبة المئوية للبطاريات التي تعمل أكثر من (178) ساعة.

b) إذا اعتبرت البطارية التي يقل زمن تشغيلها عن 59 ساعة تالفة، فما هي النسبة المئوية للتالف من هذه البطاريات؟

P₆₀ (c)

10- إذا كانت علامات (80) ألف طالب في الثانوية العامة تتخذ توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (55) والانحراف المعياري (10)، احسب:

(a) عدد الطلبة الناجحون إذا كانت علامة النجاح (50).

(b) إذا قبلت الجامعات الرسمية على المعدل التنافسي عشرة آلاف طالباً، فما هو أقل معدل قبل حسب التنافس؟

(c) الرتبة المئينية للعلامة (72).

(d) المدى الربيعي للعلامات.

11- إذا كان سعر التداول لسهم إحدى الشركات في سنة 2003 يتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي (1.25) ديناراً وانحراف معياري (15) قرشاً، احسب:

a- عدد الأيام في ذلك العام والتي قل فيها سعر التداول عن (140) قرشاً.

b- إذا علمت أن القيمة الاسمية للسهم ديناراً واحداً، فما هو عدد الأيام من ذلك العام والتي زاد فيها سعر السهم عن قيمته الاسمية؟

12- أسيل وهيا وسهير طالبات في الصف العاشر. فإذا كانت علامات الشهرين والعلامات المعيارية المناظرة معطاة في الجدول التالي:

| العلامة المعيارية | العلامة الخام | السم الطالبة |
|-------------------|---------------|--------------|
| 1 | 18 | أسيل |
| -0.5 | 15 | هيا |
| 1.5 | x | سهير |

احسب قيمة x.

13- إذا كانت أطوال طلاب الصف الأول أساسي وسطها الحسابي عشرة أمثال انحرافها المعياري. وكان طول الطالب محمد (130cm)، يقابله طولاً معيارية

قدره $\left(\frac{2}{3}\right)$. احسب العلامة المعيارية لطول الطالب صهيب والبالغ (150cm).

14- في يوم الشجرة تم زراعة (500) شتلة حرجية في حرم جامعة البلقاء التطبيقية، فإذا كان احتمال نجاح الشتلة الواحدة 75% احسب:

a- احتمال نجاح جميع الشتلات.

b- احتمال نجاح نصف الشتلات.

c- توقع عدد الشتلات الناجحة.

15- مستشفى للولادة فيه (30) سيدة في حالة ولادة، إذا فرضنا أن كل سيدة ستضع طفلاً واحداً فقط. احسب:

a- احتمال أن تنجب (20) سيدة أطفالاً ذكوراً.

b- احتمال أن تكون جميع المواليد إناثاً.

c- توقع عدد المواليد الإناث.

16- X متغير عشوائي لتجربة ذات الحدين، إذا كان احتمال نجاح التجربة في المرة الواحدة 0.15 فما عدد مرات إجراء التجربة إذا كان $E(X)=45$.

17- X متغير عشوائي لتوزيع ذات الحدين، $E(X)=3$ ، وكان احتمال نجاح التجربة في المرة الواحدة (0.25n) حيث (n) عدد مرات إجراء التجربة. احسب قيمة n.

18- تقدم طالب لامتحان مستوى اللغة الإنجليزية يتكون من مائة فقرة من نوع الاختيار من متعدد متساوية العلامة، وعدد بدائل كل فقرة خمس بدائل منها واحدة صحيحة فقط. فإذا علمت أن الطالب أجاب جميع الفقرات عشوائياً. احسب:

a- احتمال أن يجيب على 25 فقرة على الأقل إجابة صحيحة.

b- احتمال نجاح الطالب في الامتحان إذا كانت علامة النجاح 70%.

c- توقع عدد الإجابات الصحيحة.

19- إحدى شركات الكمبيوتر، ترسل رسائل عبر شبكة الإنترنت، فإذا كان احتمال وجود خطأ في أية رسالة 2%، وأرسلت الشركة في أحد الأيام (300) رسالة، احسب:

a- احتمال عدم وجود خطأ في 200 رسالة.

b- توقع عدد الرسائل التي تحوي أخطاء.

20- شرطي مرور يقف على تقاطع طرق يومياً من الساعة العاشرة صباحاً حتى الثانية عشرة ظهراً. فإذا كان يلاحظ مرور (5) سيارات سياحية يومياً خلال هذه الفترة. احسب احتمال مرور ست سيارات سياحية في نفس الفترة في يوم ما.

21- احسب:

- a) $t [4, 0.005]$
- b) $t [45, 0.1]$
- c) $t [25, 0.95]$

22- احسب

- a) $\chi^2 [7, 0.05]$
- b) $\chi^2 [42, 0.99]$
- c) $\chi^2 [1, 0.1]$



الوحدة السابعة

التقدير واختبار الفرضيات

Estimation and Testing

Hypothesis

التقدير واختبار الفرضية

Estimation and Testing Hypothesis

سنتناول في هذه الوحدة موضوعين هامين في الاستدلال الإحصائي (Statistical inference) وهما:

أولاً: التقدير الإحصائي (Statistical Estimation)

كثير من الأحيان نحتاج إلى معلمة إحصائية متعلقة بالمجتمع الإحصائي. ولكن لأسباب مختلفة لا يمكننا الحصول عليها مباشرة فنلجأ إلى تقديرها باستخدام عينة مأخوذة من المجتمع فمثلاً إذا أردنا معرفة معدل عمر تشغيل بطاريات جافة من نوع معين فلا يمكننا إيجاد الوسط الحسابي لعمر صلاحية هذه البطاريات، لذلك نأخذ عينة مناسبة من خلالها نقدر الوسط الحسابي للعمر التشغيلي لها. وقد نقدر هذا الوسط بقيمة معينة كأن نقول العمر التشغيلي (20) ساعة. أو قد نعطي فترة تقديرية لهذا الوسط فنقول أن العمر التشغيلي يقع ضمن الفترة [15, 25].

والآن وقبل أن نتعرف على كيفية التقدير سواء بقيمة أو بفترة. سنتعرف على المصطلحات التالية:

• المعلمة الإحصائية (Statistical Parameter)

وفي موضوعنا ستكون المعلمة الإحصائية هي أحد مقاييس المجتمع مثل الوسط الحسابي للمجتمع (μ) وتباين المجتمع (σ^2) ونسبة المجتمع (P).
والتي تقابل مقاييس العينة وهي على الترتيب \bar{x} ، S^2 ، \hat{p}

• مستوى الثقة (Confidence level):

وهي احتمال وقوع المعلمة الإحصائية ضمن فترة معينة تسمى فترة الثقة (Confidence interval)

• المجتمع الإحصائي (Statistical population)

هو موضوع الدراسة وسنعتبره في هذه الوحدة يأخذ توزيعاً طبيعياً.

أ- التقدير النقطي Point Estimation

وهنا نقدر معالم المجتمع بمقاييس العينة فيقدر الوسط الحسابي للمجتمع (μ) بـ
الوسط الحسابي للعينة (\bar{x}) وتباين المجتمع (σ^2) بتباين العينة (S^2) ونسبة المجتمع (p)
بنسبة العينة (\hat{p})

ولكن هذا التقدير يكتفه بعض السليبيات حيث لا يكون دقيقاً باحتمال يمكن
الاعتماد عليه.

مثال:

أخذت عينة من مجتمع إحصائي وسطه الحسابي (μ) والانحراف المعياري (σ) حيث
كان الوسط الحسابي للعينة هو ($x = 5$)، وتباينها ($S^2=4$). قدر وسط المجتمع وانحرافه
المعياري.

الحل: يقدر وسط المجتمع بـ $\mu = x$

أي أن $\mu = 5$

ويقدر انحرافه المعياري بـ $\sigma = s$

أي أن $\sigma = 2$

مثال:

أخذت عينة من طلبة جامعة البترا حجمها (200) طالباً وكان عدد الطلبة
المغتربين فيها (60) طالباً. قدر نسبة الطلبة المغتربين في الجامعة.

الحل:

$$p = \hat{p}$$

$$p = \frac{60}{200} = 0.3$$

ب- التقدير بفترة Interval Estimation

1- للعينات الكبيرة ($n \geq 30$)

• تقدير الوسط الحسابي (μ)

يقدر الوسط الحسابي بفترة الثقة

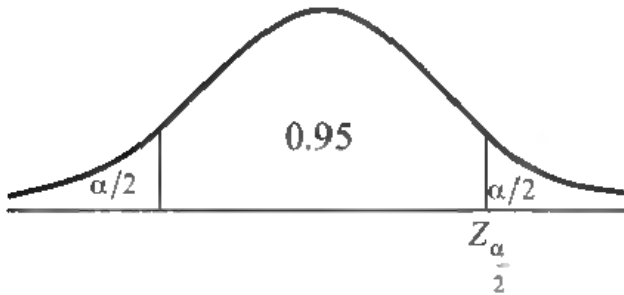
$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ملاحظة: إذا كان تباين المجتمع غير معلوم تقدر σ بـ s .

مثال:

أخذت عينة حجمها (49) ووسطها (45) من مجتمع إحصائي يتخذ توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري (3.5). جد فترة 95% ثقة لوسط المجتمع.

الحل:



نجد في البداية قيمة $Z_{\alpha/2}$.

$$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

ونجد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ بالاستفادة من جدول

التوزيع الطبيعي المعياري حيث تكون القيمة المقابلة للمساحة 0.475

$$\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

وبذلك تكون فترة الثقة عند مستوى دلالة 95% هي

$$45 - 1.96 \frac{3.5}{\sqrt{49}} \leq \mu \leq 45 + 1.96 \frac{3.5}{\sqrt{49}}$$

$$45 - 0.98 \leq \mu \leq 45 + 0.98$$

$$44.02 \leq \mu \leq 45.98$$

وهذا يعني أن احتمال وقوع وسط المجتمع بين القيمتين 44.02 , 45.98 هو 95%.

لتسهيل حل مسائل من هذا النوع سنعطي قيم $Z_{\alpha/2}$ لفترات الثقة عند مستويات دلالة شائعة ونلخصها في الجدول التالي:

| Confidence Level | $Z_{\alpha/2}$ |
|------------------|----------------|
| 80% | 1.28 |
| 90 % | 1.645 |
| 95% | 1.96 |
| 98% | 2.33 |
| 99% | 2.576 |

مثال:

إذا كان معدل السحب اليومي بالدينار لوحدة الصراف الآلي في أحد فروع البنك العربي مساوياً (385) دينار بانحراف معياري (27) دينار أوجد فترة 99% ثقة لمجتمع الأشخاص الذين يستخدمون وحدة الصراف الآلي في ذلك الفرع. إذا علمت أن حجم العينة قيد الدراسة (900) عميل.

الحل:

بما أن حجم العينة كبيراً نستخدم (S) بدلاً من σ في القانون. فيصبح القانون على الصورة

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

فتكون الفترة المطلوبة هي

$$385 - (2.576) \frac{27}{\sqrt{900}} \leq \mu \leq 385 + (2.576) \frac{27}{\sqrt{900}}$$

$$385 - 2.318 \leq \mu \leq 385 + 2.318$$

$$382.682 \leq \mu \leq 387.318$$

• تقدير الفرق بين وسطين ($\mu_1 - \mu_2$) (Estimation of mean difference)

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين يتخذان توزيعاً طبيعياً وسطيهما الحسابيين μ_1 ، μ_2 وانحرافيهما σ_1^2 ، σ_2^2 على الترتيب. فإن فترة $(1-\alpha)\%$ ثقة للفرق بين وسطي المجتمعين $\mu_1 - \mu_2$ هي

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

حيث n_1 ، n_2 حجم كل من العييتين على الترتيب

مثال:

أخذت عيتمان من مشتركي شركتي اتصالات خلوية وأعطت المعلومات التالية:

| تباين مجتمع الدقائق المستخدمة | معدل الدقائق المستخدمة | حجم العينة (n_i) |
|-------------------------------|------------------------|----------------------|
| $\sigma_1^2 = 15$ | $\bar{x}_1 = 75$ | $n_1 = 100$ |
| $\sigma_2^2 = 8$ | $\bar{x}_2 = 80$ | $n_2 = 81$ |

جد فترة 90% ثقة للفرق بين وسطين المجتمعين

الحل:

$$(75 - 80) - (1.645) \sqrt{\frac{15}{100} + \frac{8}{81}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (75 - 80) + (1.645) \sqrt{\frac{15}{100} + \frac{8}{81}}$$

$$-5 - 0.822 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -5 + 0.823$$

$$-5.823 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -4.177$$

ملاحظة: إذا كانت σ_1 ، σ_2 غير معلومتين يمكن الاستعاضة عنهما

بـ s_1 ، s_2 .

• فترة الثقة لنسبة المجتمع (p)

(Interval Estimation of Population Proportion)

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ملاحظة:

مثال:

أخذت عينة حجمها (500) طالبة من مجتمع طالبات الجامعات الأردنية فكان عدد المحجبات منهن (280) طالبة. أوجد فترة 95% ثقة لنسبة الطالبات المحجبات في الجامعات الأردنية.

الحل:

$$n = 500$$

$$\hat{p} = \frac{280}{500} = 0.56$$

فتكون الفترة المطلوبة هي:

$$0.56 - 1.69 \sqrt{\frac{(0.56)(0.44)}{500}} \leq p \leq 0.56 + 1.69 \sqrt{\frac{(0.56)(0.44)}{500}}$$

$$0.56 - 0.044 \leq p \leq 0.56 + 0.044$$

$$0.516 \leq p \leq 0.604$$

• تقدير فترة الثقة للفرق بين نسبتي

(Interval estimation for proportion difference)

مجتمعين مستقلين تكون فترة $(1-\alpha)\%$ ثقة للفرق بين نسبتي المجتمعين هي:

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \leq p - p_2 \leq (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

مثال:

مصنعين لأجهزة التلفزيون، أخذت عينة من إنتاج المصنع الأول حجمها (40) جهازاً وكانت نسبة المعيب فيها (2%) وأخذت عينة أخرى من إنتاج المصنع الثاني حجمها (60) جهازاً فكانت نسبة المعيب فيها 1.5% .
أوجد فترة 98% ثقة للفرق بين نسبتي الأجهزة الصالحة بين المصنعين.

الحل:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= 0.98 & \hat{p}_2 &= 0.985 \\ n_1 &= 40 & n_2 &= 60 \\ \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} &= \sqrt{\frac{(0.98)(0.02)}{40} + \frac{(0.985)(0.015)}{60}} \\ &= 0.027 \end{aligned}$$

فتكون فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\begin{aligned} (0.98-0.985) - (2.33) (0.027) &\leq p_1-p_2 \leq (0.98-0.985) + (2.33) (0.027) \\ -0.005 - 0.063 &\leq p_1- p_2 \leq -0.005 + 0.063 \\ -0.068 &\leq p_1 - p_2 \leq 0.058 \end{aligned}$$

2- للعينات الصغيرة ($n < 30$)

• فترة الثقة للوسط الحسابي

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

ملاحظة: إذا كانت σ معلومة نستخدم توزيع (Z) بدلاً من توزيع t (مثل حالة العينات الكبيرة)

مثال:

أخذت عينة حجمها (9) عبوات من إنتاج إحدى آلات تعبئة العصير للمصنع ما فكان حجم العصير في كل منها بالمليتر 245، 248، 251، 247، 253، 243، 249، 253، 252.
أوجد فترة 95% ثقة لمعدل حجم إنتاج الآلة.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 249$$

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$s = \sqrt{12.75} = 3.57$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t \left[n - 1, \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$= t [8, 0.025]$$

$$= 2.306$$

فتكون فترة الثقة المطلوبة:

$$249 - 2.306 \frac{3.57}{\sqrt{9}} \leq \mu \leq 249 + 2.306 \frac{3.57}{\sqrt{9}}$$

$$249 - 2.74 \leq \mu \leq 249 + 2.74$$

$$246.26 \leq \mu \leq 251.74$$

• فترات الثقة للفرق بين وسطين

لمجتمعين مستقلين تكون فترة الثقة للفرق بين وسطين بمستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ هي

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}} S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq m_1 - m_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}} S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

حيث

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t \left[n_1 + n_2 - 2, \frac{\alpha}{2} \right]$$

مثال:

أخذت عينتان من مجتمعين متجانس تباينهما وأعطت النتائج التالية:

| العيينة الأولى | العيينة الثانية | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| $n_1 = 17$ | $n_2 = 25$ | حجم العينة |
| $\bar{x}_1 = 120$ | $\bar{x}_2 = 112$ | الوسط الحسابي |
| $s_1 = \sqrt{10}$ | $s_2 = 5$ | الانحراف المعياري |

أوجد فترة 90% ثقة للفرق بين وسطي المجتمعين.

الحل:

نحسب

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{(16)(10) + (24)(25)}{40}$$

$$S^2 = 19 \Rightarrow S = 4.36$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t \left[n_1 + n_2 - 2, \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$= t [40, 0.05] = 1.684$$

$$S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (4.36)(0.314) = 1.37$$

فتكون فترة الثقة المطلوبة

$$(120 - 112) - (1.684)(1.37) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (120 - 112) + (1.684)(1.37)$$

$$8 - 2.31 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 8 + 2.31$$

$$5.69 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 10.31$$

ثانياً: اختبار الفرضيات (Testing Hypotheses)

يعتبر موضوع اختبار الفرضيات من المواضيع الهامة في الإحصاء الاستدلالي حيث يحتاجه كل باحث مهما كان تخصصه وفي العادة تستخدم فرضيتان الأولى تسمى الفرضية الصفرية (العدم) (null hypothesis) وعادة يرمز لها بالرمز (H_0) والأخرى تسمى الفرضية البديلة (alternative hypothesis) ويرمز لها بالرمز (H_1). ويكون القرار الإحصائي بقبول أو رفض الفرضية الصفرية.

والفرضية الصفرية تكون بالوضع المحايد.

أنواع الخطأ

1- الخطأ من النوع الأول (type I error)

وهو رفض الفرضية الصفرية عندما تكون صحيحة.

2- الخطأ من النوع الثاني (Type II error)

وهو قبول الفرضية الصفرية وهي خاطئة.

هنالك عدة اختبارات منها ما هو متعلق بالوسط أو الفرق بين وسطين، النسبة والفرق بين نسبتيين. وسندرس هذه الاختبارات بشيء من التفصيل تالياً.

• اختبار الفرضيات المتعلق بالوسط الحسابي

ويكون الهدف منه اختبار فيما إذا كان الوسط الحسابي يساوي أو أكبر أو أصغر من قيمة ما.

وتكون الفرضيات هذه الحالات كما يلي وعلى الترتيب

$$\begin{aligned} 1) \quad H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{aligned}$$



2) $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu > \mu_0$



3) $H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu < \mu_0$



حيث تمثل α : احتمال رفض الفرضية الصفرية وتسمى مستوى الدلالة.

أ- اختبار الوسط للعينات الكبيرة

لإجراء هذا الاختبار بمستوى دلالة α

1. نكتب الفرضيات الإحصائية المناسبة.

2. نجد قيمة الإحصائية Z بالقانون.

$$Z = \frac{\bar{x} - m_0}{s \sqrt{n}}$$

3. نحدد منطقة الرفض والقبول باستخدام قيمة Z الحرجة (Critical point).

وتسمى أيضا Z الجدولية.

4. وإذا وقع الإحصائي Z في منطقة القبول نقبل الفرضية الصفرية ونرفض

البديلة. وغير ذلك نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة.

مثال:

إذا حددت مديرية المواصفات والمقاييس وزن رغيف الخبز بـ (200gm).

بانحراف معياري (10gm) فإذا أخذ أحد المقتشين عينة من مخبز معين مكونة من

(100) رغيف فكان الوسط الحسابي لأوزانها (197gm).

فهل هذا المخبز يعتبر مخالف للمواصفات والمقاييس عند مستوى دلالة $(\alpha=0.05)$ ؟

الحل:

سنعتبر أن الشخص مخالف إذا كان وزن الرغيف أقل من (200gm).

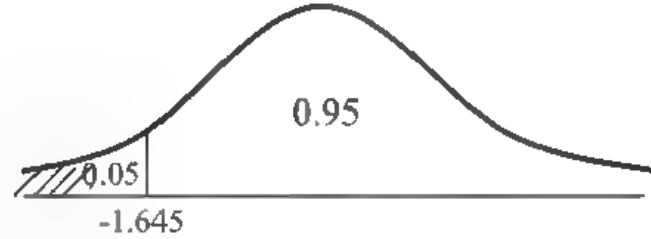
$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$Z_{\alpha} = -1.645$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$= \frac{197 - 200}{10 / \sqrt{100}} = -3$$



وتقع قيمة الإحصائي ضمن منطقة الرفض لذلك نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة أي أن وزن الرغيف يقل عن الوزن المقرر من مديرية المواصفات والمقاييس عند مستوى الدلالة المعطى لذلك فهو مخالف.

مثال:

ينتج مصنع أقراص مرنة (floppy disk) للحاسوب ذات القطر (3.500 inch) بالمحرف معياري (0.02inch). أخذت عينة من إنتاج المصنع مكونة من (64) قرصاً وقيست أقطارها فأعطت متوسط حسابي مقداره 3.505. فهل تعتبر هذه العينة ملائمة لهذا النوع من الأقراص عند مستوى دلالة $(\alpha=0.01)$.

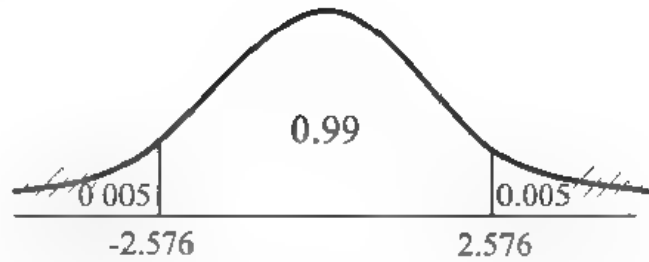
الحل:

$$H_0: \mu = 3.500$$

$$H_1: \mu \neq 3.500$$

$$Z = \frac{3.505 - 3.500}{0.02/\sqrt{64}}$$

$$Z = 2$$



تقع هذه القيمة في منطقة القبول. فلذلك نقبل الفرضية الصفرية ونرفض البديلة.
أي أن الأقراص ملائمة عند مستوى الدلالة المعطى.

ملاحظة: إذا كانت σ غير معلومة نستخدم (S) كقيمة تقديرية حيث تصبح
قيمة الإحصائي:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

ب- اختبار الوسط في حالة العينات الصغيرة وتباين المجتمع غير معلوم:
نستخدم هنا توزيع t بدرجات حرية (n-1) بدلاً من Z. ويكون الإحصائي

$$t = \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}}$$

مثال:

إذا كان معدل نسبة النيكوتين المثبتة على أحد أنواع السجائر هي (0.7 mlg).
أخذ (16) سيجارة من هذا النوع فكان الوسط الحسابي لنسبة النيكوتين تساوي
(0.75mlg) بانحراف معياري (0.04 mlg). فهل تعتبر هذه السجائر ذات معدل نسبة
نيكوتين أعلى من المثبت على علبة السجائر عند مستوى دلالة ($\alpha=0.05$).

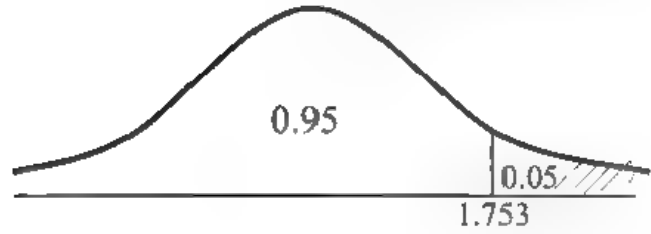
الحل:

$$H_0: \mu = 0.7$$

$$H_1: \mu > 0.7$$

$$t_{\alpha} = t[15, 0.5] \\ = 1.753$$

$$t = \frac{0.75 - 0.7}{0.04/\sqrt{16}} = 5$$



وتقع في منطقة الرفض أي أن معدل نسبة النيكوتين أعلى من المثبت على علبة الدخان.

• اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين وسطين

أ- العينات الكبيرة:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين تباين كل منهما على الترتيب σ_1, σ_2 بوسطين حسابيين μ_1, μ_2 فيمكن أن نختبر إحدى الحالات التالية:

- | | | | |
|----|-------------------------|-------------------|------------------------|
| 1) | $H_0: \mu_1 = \mu_2$ | \Leftrightarrow | $\mu_1 - \mu_2 = 0$ |
| | $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ | \Leftrightarrow | $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ |
| 2) | $H_0: \mu_1 = \mu_2$ | \Leftrightarrow | $\mu_1 - \mu_2 = 0$ |
| | $H_1: \mu_1 > \mu_2$ | \Leftrightarrow | $\mu_1 - \mu_2 > 0$ |
| 3) | $H_0: \mu_1 = \mu_2$ | \Leftrightarrow | $\mu_1 - \mu_2 = 0$ |
| | $H_1: \mu_1 < \mu_2$ | \Leftrightarrow | $\mu_1 - \mu_2 < 0$ |

ويكون الإحصائي في جميع الحالات

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$\text{or } Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

مثال:

يدعي أحد الباحثين أن متوسط علامات طلبة الجامعات الحكومية في مادة الإحصاء أفضل من طلبة الجامعات الخاصة في نفس المادة. فإذا أخذت عيّتان من الجامعات الحكومية والخاصة وأعطت النتائج التالية:

| عينة الجامعات الحكومية | عينة الجامعات الخاصة | |
|------------------------|----------------------|---------------|
| $n_1 = 81$ | $n_2 = 100$ | حجم العينة |
| $\bar{x}_1 = 75$ | $x_2 = 70$ | الوسط الحسابي |
| $s_1^2 = 18$ | $s_2^2 = 10$ | التباين |

اختبر ادعاء الباحث على مستوى دلالة $(\alpha=0.05)$.

الحل:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$Z_{\alpha} = 1.645$$

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{75 - 70}{\sqrt{\frac{18}{81} + \frac{10}{100}}}$$

$$\therefore Z = 8.82$$



وتقع هذه القيمة في منطقة الرفض أي أن ادعاء الباحث صحيح.

ملاحظة: في المثال السابق استخدم S_1^2 ، S_2^2 بدلاً من σ_1^2 ، σ_2^2 على الترتيب مع استخدام الإحصائي Z وذلك لأن العينتان كبيرتان.

ب- للعينات الصغيرة والتباين غير معلوم

إذا أخذت عيّتان صغيرتان (أقل من 30) مستقلتان من مجتمعين وسطيهما على الترتيب μ_1 ، μ_2 ، وتباينهما غير معلوم فإننا نستخدم توزيع t بدلاً من Z بدرجات حرية (n_1+n_2-2) ويكون الإحصائي هو

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

مثال:

أخذت عينتان من إنتاج مصنعين لأجهزة التلفزيون وأعطت النتائج التالية:

| عينة المصنع الثاني | عينة المصنع الأول | |
|--------------------|-------------------|-----------------------------|
| $n_2 = 16$ | $n_1 = 25$ | حجم العينة |
| $\bar{x}_2 = 15$ | $\bar{x}_1 = 17$ | متوسط العمر التشغيلي بالسنة |
| $s_2 = 2$ | $s_1 = 2.5$ | الانحراف المعياري |

بناء على العينتين هل يوجد فرق بين متوسطي العمر التشغيلي لإنتاج المصنعين على مستوى دلالة $(\alpha=0.1)$.

الحل:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_{\alpha} = t[39, 0.05]$$

2

$$= 1.684$$

$$S^2 = \frac{(25 - 1)(2.5)^2 + (16 - 1)(2)^2}{25 + 16 - 2}$$

$$= 5.38$$

$$\therefore S = 2.32$$



$$\begin{aligned}\therefore t &= \frac{17 - 15}{2.32 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{16}}} \\ &= \frac{2}{(2.32)(0.32)} \\ t &= 2.7\end{aligned}$$

وتقع في منطقة الرفض

إذن يوجد فرق ذو دلالة بين متوسطي العمر التشغيلي لإنتاج المصنعين.

ملاحظة: إذا كان تباينا المجتمعين معلومين نستخدم توزيع Z بدلاً من t.

• اختبار الفرضيات المتعلق بالنسبة

في هذه الحالة تكون الفرضيات الممكنة

- 1) $H_0: P = P_0$
 $H_1: P \neq P_0$
- 2) $H_0: P = P_0$
 $H_1: P > P_0$
- 3) $H_0: P = P_0$
 $H_1: P < P_0$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

الإحصائي يكون

مثال:

مدير يعاقب سكرتيته إذا كانت نسبة الخطأ في الكتب التي تطبعها أكثر من 5% فإذا أخذت عينة مكونة من 50 كتاب من طباعة السكرتيرة ووجد أن ثلاث كتب منها تحوي أخطاء.

فهل هذا يعني أن السكرتيرة تستحق العقاب عند مستوى دلالة $(\alpha=0.05)$.

الحل:

$$H_0: p = 0.05$$

$$H_1: p > 0.05$$

$$Z_{\alpha} = 1.645$$

$$\hat{p} = \frac{3}{50}$$

$$= 0.06$$

$$Z = \frac{0.06 - 0.05}{\sqrt{\frac{(0.05)(0.95)}{50}}}$$

$$= \frac{0.01}{0.031} = 0.32$$



هذه القيمة تقع ضمن منطقة القبول وبالتالي لا تستحق السكرتيرة العقاب.

• اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين نسبتي

الفرضيات الممكنة:

$$1) \quad H_0: P_1 = P_2$$

$$H_1: P_1 \neq P_2$$

$$2) \quad H_0: P_1 = P_2$$

$$H_1: P_1 > P_2$$

$$3) \quad H_0: P_1 = P_2$$

$$H_1: P_1 < P_2$$

والإحصائي يكون

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

حيث

مثال:

أخذت عيتان من الرجال والنساء في مجتمع ما فأعطت النتائج التالية:

| عينة النساء | عينة الرجال | |
|-------------|-------------|-----------------------------------|
| $n_2 = 200$ | $n_1 = 200$ | حجم العينة |
| 210 | 160 | عدد الذين يستخدمون الهاتف الخليوي |

فهل هذه النتائج تدل على أن هنالك اختلاف بين نسبة الرجال الذين يستخدمون الخليوي عن نسبة النساء.

اختبر ذلك على مستوى دلالة ($\alpha=0.02$)

الحل:

$$H_0: P_1 = P_2$$

$$H_1: P_1 \neq P_2$$

$$Z_{\alpha/2} = 2.33$$



$$\hat{p}_1 = \frac{160}{200} = 0.8$$

$$\hat{p}_2 = \frac{210}{300} = 0.7$$

$$\hat{p} = \frac{160 + 210}{500} = 0.74$$

$$Z = \frac{0.8 - 0.7}{\sqrt{(0.74)(0.36)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300}\right)}} \\ = \frac{0.1}{0.047} = 2.13$$

وتقع في منطقة القبول أي أنه لا يوجد فرق بدلالة إحصائية بين النسبتين.

تمارين

1- أخذت عينة حجمها (64) من مجتمع إحصائي وسطه الحسابي (μ) وانحرافه المعياري (10)، إذا كان الوسط الحسابي للعينة يساوي 70. أوجد

1. تقدير نقطي ثقة لوسط المجتمع.

2. فترة 80% ثقة لوسط المجتمع

2- أخذ عينة حجمها (25) من مجتمع إحصائي وسطه الحسابي μ من مجتمع إحصائي وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ . فإذا كان الوسط الحسابي للعينة (17) وتباينها (4). أوجد:

1. فترة 90% ثقة لوسط المجتمع μ .

2. فترة 98% ثقة لوسط المجتمع μ .

3- أخذت عينتان من مجتمعين مستقلين وأعطت النتائج التالية:

| العينة الأولى | العينة الثانية | |
|------------------|------------------|-------------------|
| $n_1 = 64$ | $n_2 = 36$ | حجم العينة |
| $\bar{x}_1 = 50$ | $\bar{x}_2 = 18$ | الوسط الحسابي |
| $s_1 = 4$ | $s_2 = 5$ | الانحراف المعياري |

جد فترة 95% ثقة للفرق بين الوسطين

$$a - (\mu_1 - \mu_2)$$

$$b - (\mu_2 - \mu_1)$$

4- أخذت عينتان من مجتمعين مستقلين وأعطت النتائج التالية

| العينة الثانية | العينة الأولى | |
|-------------------|-------------------|---------------|
| $n_2 = 24$ | $n_1 = 15$ | حجم العينة |
| $\bar{x}_2 = 127$ | $\bar{x}_1 = 123$ | الوسط الحسابي |
| $s_2 = 40$ | $s_1 = 38$ | التباين |

جد فترة 99% ثقة للفرق بين الوسطين ($\mu_1 - \mu_2$)

5- إذا كان معدل دخل (10) أسر أخذت عشوائياً من مدينة عمان هو (200) دينار. وكان معدل دخل (15) أسرة أخذت عشوائياً من مدينة الزرقاء هو (175) دينار بانحراف معياري (10) دنائير. جد فترة 95% ثقة للفرق بين متوسطي الدخل لأسر مدينة عمان والزرقاء.

6- أخذت عينة من طلاب الجامعة الأردنية حجمها (400) طالباً فوجد أن (250) طالباً منهم يمتلكون سيارات خاصة. اكتب فترة 90% ثقة لنسبة الطلبة الذين يمتلكون سيارات خاصة في الجامعة.

7- أخذت عينة من السياح الذين يزورون مدينة العقبة الأردنية حجمها (500) سائحاً فكانت نسبة الأجانب منهم (25%) وأخذت عينة أخرى من السياح الذين يزورون مدينة شرم الشيخ المصرية حجمها (500) سائح وكان نسبة الأجانب منهم (40%). جد فترة 99% ثقة للفرق بين النسبتين.

8- أخذت عينة حجمها (225) من مجتمع إحصائي يتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي μ وانحراف معياري (8). وكان الوسط الحسابي للعينة (35). اختبر الفرضية: $H_0: \mu = 34$ مقابل $H_1: \mu \neq 34$ على مستوى دلالة ($\alpha = 0.02$)

9- أخذت عينتان عشوائيتان من نوعين من المصابيح الأولى حجمها (40) مصباحاً بمتوسط ساعات تشغيلية مقداره (5000) ساعة بانحراف معياري (250) ساعة والثانية حجمها (50) مصباحاً بمتوسط ساعات تشغيلية مقداره (4500) ساعة بانحراف معياري (200) ساعة فهل يوجد فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي الساعات التشغيلية على مستوى دلالة (0.05).

10- إذا كانت أطوال طلاب الصف الأول الأساسي تتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي μ وانحراف معياري σ . أخذت عينة عشوائياً من طلاب الصف الأول الأساسي فكانت أطوالهم 110، 127، 119، 118، 125، 120، 101، 109. اختبر الفرضية القائلة بأن متوسط أطوال الصف الأول الأساسي أقل من (120 cm) على مستوى دلالة ($\alpha=0.01$).

11- إذا كانت نسبة الشفاء من مرض معين إذا استخدم العلاج (A) هو (93%). ثم أنتج أحد مصانع الأدوية نوعاً آخر من العلاج (B). وادعى أن هذا العلاج له نسبة شفاء أكبر من النوع الأول. فأخذت عينة مكونة من (120) مريض طبق عليهم العلاج B فشفي منهم (114) مريض. فهل ادعاء المصنع صحيح على مستوى دلالة ($\alpha=0.01$).

12- أخذت عينتان من الذكور، الإناث حجمهما على الترتيب 80، 75 فكان عدد المصابين بالسرطان من عينة الذكور (4) وعدد المصابات بالسرطان من عينة الإناث (3). اختبر الادعاء القائل بأن نسبة المصابين بالسرطان من الذكور أعلى منها من الإناث عند مستوى دلالة ($\alpha=0.05$).



الوحدة الثامنة

الأرقام القياسية

Index Numbers

الأرقام القياسية

Index Numbers

مفهوم الرقم القياسي

تعريف:

الرقم القياسي هو أداة لقياس التغير النسبي أو النسبي المئوي في قيم الظواهر من زمن إلى آخر أو من مكان إلى آخر. ويسمى الزمن أو المكان الأول بالأساس ويسمى الزمن أو المكان الثاني بالمقارن.

مثال:

إذا كان سعر كيلو الخبز سنة 1995 (15) قرش وفي سنة 2000 عشرين قرش. فما هو الرقم القياسي لسعر الخبز سنة 2000 باعتبار سنة 1995 الأساس؟

الحل:

$$\text{الرقم القياسي} = \frac{\text{سعر سنة المقارنة}}{\text{سعر سنة الأساس}} \times 100\%$$

$$= \frac{\text{سعر سنة 2000}}{\text{سعر سنة 1995}} \times 100\%$$

$$I = \frac{20}{15} \times 100\%$$

$$= 133.3\%$$

وهذا الرقم يعني أن كمية الخبز التي كان ثمنها عام 1995 مئة قرش أصبح ثمنها في عام 2000 تقريباً (133) قرشاً.

فوائد الرقم القياسي

- 1- معرفة نسبة التغير في ظاهرة ما من مكان لآخر أو من زمن لآخر.
- 2- معرفة الدخل الحقيقي للفرد أو ما يسمى بالقوة الشرائية لدخل الفرد.
- 3- معرفة نسبة الزيادة في الإنتاج من زمن لآخر.

مثال:

إذا كان الرقم القياسي لدخل الفرد عام 2002 باعتبار سنة 2000 الأساس هو 1.5، والرقم القياسي لتكاليف المعيشة في عام 2002 باعتبار سنة 2000 الأساس هو 3، فما هي القوة الشرائية لدخل الفرد في عام 2002 باعتبار عام 2000 هي الأساس.

الحل:

$$\text{القوة الشرائية لدخل الفرد} = \frac{\text{الرقم القياسي لدخل الفرد}}{\text{الرقم القياسي لتكاليف المعيشة}} \times 100\%$$

$$= \frac{1.5}{3} \times 100\% = 50\%$$

أي أن دخل الفرد قد نقص بنسبة 50% ما بين عام 2000 وعام 2002.

الرقم القياسي البسيط: Simple Index Number

وهناك نوعين من الأرقام القياسية البسيطة

1- الرقم القياسي البسيط للأسعار:

$$a - \text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس}} \times 100\%$$

$$I_c(P) = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100\%$$

حيث: P_1 = سعر سنة المقارنة

P_0 = سعر سنة الأساس

$$b- \text{الرقم القياسي النسبي للأسعار} = \frac{1}{r} \times \text{مجموع} \left(\frac{\text{أسعار سنة مقارنة}}{\text{أسعار سنة الأساس}} \right) \times 100\%$$

$$I_p(P) = \frac{1}{r} \left(\sum \frac{P_1}{P_0} \right) \times 100\% \quad , r = \text{عدد الظواهر}$$

ملاحظة: الرقم القياسي النسبي هو الوسط الحسابي للأرقام القياسية للظواهر الداخلة في حسابه.

مثال:

إذا كان سعر بيع الوحدة لإنتاج ثلاثة مصانع في عامي 2004، 2003 معطاة في الجدول التالي:

| المصنع | السعر (دينار للوحدة) | |
|--------|----------------------|------|
| | 2003 | 2004 |
| 1 | 35 | 36 |
| 2 | 30 | 32 |
| 3 | 31 | 33 |

احسب الرقم القياسي التجميعي البسيط، والرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار عام 2004 باعتبار عام 2002 هي الأساس.

الحل:

$$I_c(P) = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100\% = \frac{36 + 32 + 33}{35 + 30 + 31} \times 100\%$$

$$I_c(P) = \frac{101}{96} \times 100\% = 105.21\%$$

$$I_p(P) = \frac{1}{r} \left(\sum \frac{P_1}{P_0} \right) \times 100\%$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{36}{35} + \frac{32}{30} + \frac{33}{31} \right) \times 100\%$$

$$= \frac{1}{3} (1.03 + 1.07 + 1.06) \times 100\%$$

$$I_P(P) = 105,31\%$$

2- الرقم القياسي البسيط للكميات: وهو رقمين:

a- الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات = $\frac{\text{مجموع كميات سنة المقارنة}}{\text{مجموع كميات سنة الأساس}} \times 100\%$

$$I_c(Q) = \frac{\sum Q_1}{\sum Q_0} \times 100\%$$

حيث:

Q_1 = كمية سنة المقارنة

Q_0 = كمية سنة الأساس

b- الرقم القياسي النسبي للكميات = $\frac{1}{r} \times \text{مجموع} \left(\frac{\text{كمية سنة المقارنة}}{\text{كمية سنة الأساس}} \right) \times 100\%$

$$I_P(Q) = \frac{1}{r} \left(\sum \frac{Q_1}{Q_0} \right) \times 100\%$$

r = عدد الظواهر

مثال:

في متجر لبيع المواد الاستهلاكية إذا كانت كميات المواد المباعة بالطن في عامي

2003 , 2000 هي كما يلي:

| المادة | كمية عام 2000 | كمية عام 2003 |
|--------|---------------|---------------|
| سكر | 500 | 560 |
| رز | 450 | 480 |
| طحين | 650 | 580 |
| حليب | 700 | 730 |

أوجد الرقم القياسي التجميعي والنسبي البسيط لكميات عام 2003 باعتبار عام 2000 هو الأساس.

الحل:

$$\begin{aligned} I_c(Q) &= \frac{\sum Q_1}{\sum Q_0} \times 100\% \\ &= \frac{560 + 480 + 580 + 730}{500 + 450 + 650 + 700} \\ &= \frac{2350}{2300} \times 100\% \\ &= 102.17\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_p(Q) &= \frac{1}{r} \left(\sum \frac{Q_1}{Q_0} \right) \times 100\% \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{560}{500} + \frac{480}{450} + \frac{580}{650} + \frac{730}{700} \right) \times 100\% \\ &= \frac{1}{4} (1.12 + 1.07 + 0.89 + 1.04) \times 100\% \\ &= \frac{1}{4} (4.12) 100\% = 103\% \end{aligned}$$

الأرقام القياسية المرجحة (Weighted Index Number)

وهناك نوعان من الأرقام القياسية المرجحة

1- الرقم القياسي المرجح للأسعار: وهو ثلاثة أرقام:

a) الرقم القياسي للأسعار والمرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير للأسعار).

$$\text{رقم لاسبير للأسعار} = \frac{\text{مجموع (أسعار سنة المقارنة} \times \text{كميات سنة الأساس)}}{\text{مجموع (أسعار سنة الأساس} \times \text{كميات سنة الأساس)}} \times 100\%$$

$$laspeyre(P) = \frac{\sum P_1 Q_0}{P_0 Q_0} \times 100\%$$

(b) الرقم القياسي للأسعار والمرجع بكميات سنة المقارنة (رقم باش للأسعار).

$$\text{رقم باش للأسعار} = \frac{\text{مجموع (أسعار سنة المقارنة} \times \text{كميات سنة المقارنة)}}{\text{مجموع (أسعار سنة الأساس} \times \text{كميات سنة المقارنة)}} \times 100\%$$

$$paasche(P) = \frac{\sum P_1 Q_1}{P_0 Q_1} \times 100\%$$

(c) الرقم القياسي الأمثل للأسعار: (رقم فشر للأسعار).

$$Fisher(p) = \sqrt{Laspeyre(P) \times Paasche(P)} \%$$

أي هو الوسط الهندسي لرقمي لاسبير وباش للأسعار.

مثال:

الجدول التالي يمثل أسعار وكميات مبيعات أربع سلع التي بيعت عامي 2002، 2004.

| السلعة | سعر الوحدة | | كمية المبيعات | |
|--------|------------|----------|---------------|----------|
| | عام 2002 | عام 2004 | عام 2002 | عام 2004 |
| a | 28 | 40 | 200 | 250 |
| b | 16 | 20 | 300 | 360 |
| c | 210 | 15 | 400 | 460 |
| d | 4 | 10 | 600 | 660 |

فإذا اعتبرنا سنة 2002 هي سنة الأساس، فأوجد ما يلي:

(a) رقم لاسبير للأسعار.

(b) رقم باش للأسعار.

(c) رقم فشر للأسعار.

الحل:

a)
$$laspeyre(P) = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100\%$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{40 \times 200 + 20 \times 300 + 15 \times 400 + 10 \times 600}{28 \times 200 + 16 \times 300 + 210 \times 400 + 4 \times 600} \\
 &= \frac{26000}{96800} \times 100\% \\
 &= 26.86\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } paasche(P) &= \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \times 100\% \\
 &= \frac{40 \times 250 + 20 \times 360 + 15 \times 460 + 10 \times 660}{28 \times 250 + 16 \times 360 + 210 \times 460 + 4 \times 660} \times 100\% \\
 &= \frac{30700}{112000} \times 100\% \\
 &= 27.41\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Fisher(p) &= \sqrt{Laspeyre(P) \times Paasche(P)} \% \\
 &= \sqrt{26.86 \times 27.41} \% \\
 &= 27.13\%
 \end{aligned}$$

ملاحظة: بعض الباحثين الإحصائيين يستخدمون أوزان تعطى للأسعار بدل الكميات، ولكننا في هذا الكتاب سنستخدم الكميات مباشرة وليس أوزان الأسعار.

2- الرقم القياسي المرجح للكميات: وهو ثلاثة أرقام.

a- الرقم القياسي للكميات المرجح بأسعار سنة الأساس (رقم لاسبير للكميات)

$$\text{رقم لاسبير للكميات} = \frac{\text{مجموع (كميات سنة المقارنة} \times \text{أسعار سنة الأساس)}}{\text{مجموع (كميات سنة الأساس} \times \text{أسعار سنة الأساس)}} \times 100\%$$

$$laspeyre(Q) = \frac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0} \times 100\%$$

b- الرقم القياسي للكميات والمرجح بأسعار سنة المقارنة (رقم باش للكميات).

$$\text{رقم باش للأسعار} = \frac{\text{مجموع (كميات سنة المقارنة} \times \text{أسعار سنة المقارنة)}}{\text{مجموع (كميات سنة الأساس} \times \text{أسعار سنة المقارنة)}} \times 100\%$$

$$paasche(Q) = \frac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_1} \times 100\%$$

c- الرقم القياسي الأمثل للكميات: (رقم فشر للكميات).

$$Fisher(Q) = \sqrt{Laspeyre \times Paasche} \%$$

مثال:

الجدول التالي يبين أسعار وكميات أربع سلع في عامي 2001, 2002.

| السلعة | سعر الوحدة | | كمية المبيعات | |
|--------|------------|----------|---------------|----------|
| | عام 2001 | عام 2002 | عام 2001 | عام 2002 |
| a | 20 | 25 | 200 | 240 |
| b | 22 | 19 | 180 | 210 |
| c | 20 | 20 | 300 | 280 |
| d | 9 | 11 | 110 | 100 |

على اعتبار أن سنة 2001 هي سنة الأساس أوجد ما يلي:

a) رقم لاسبير للكميات.

b) رقم باش للكميات.

c) رقم فشر للكميات.

الحل

$$a) \quad laspeyre(Q) = \frac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0} \times 100\%$$

$$= \frac{240 \times 20 + 210 \times 22 + 280 \times 20 + 100 \times 9}{200 \times 20 + 180 \times 22 + 300 \times 20 + 110 \times 9} 100\%$$

$$= \frac{15920}{14950} \times 100\%$$

$$= 106.49\%$$

$$b) \quad Paasche(Q) = \frac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_1} \times 100\%$$

$$= \frac{240 \times 25 + 210 \times 19 + 280 \times 20 + 100 \times 11}{200 \times 25 + 180 \times 19 + 300 \times 20 + 110 \times 11} \times 100\%$$

$$= \frac{16690}{15630} \times 100\%$$

$$= 106.78\%$$

c) $Fisher(Q) = \sqrt{Laspeyre \times Paasche} \%$

$$= \sqrt{106.49 \times 106.78} \%$$

$$= 106.63\%$$

ملاحظة: إذا لم تذكر سنة الأساس لظاهر ما. فتكون السنة الأقدم هي سنة الأساس.

رقم مارشال:

هنالك عالم آخر اسمه مارشال يرجع الأرقام القياسية للأسعار (للكميات) بمعدل كميات (أسعار) سنة المقارنة وسنة الأساس فيكون:

a) $Marshall(P) = \frac{\sum P_1(Q_0 + Q_1)}{\sum P_0(Q_0 + Q_1)} \times 100\%$

b) $Marshall(Q) = \frac{\sum Q_1(P_1 + P_0)}{\sum Q_0(P_1 + P_0)} \times 100\%$

ففي المثال السابق يكون:

a) $Marshall(p) = \frac{25(200 + 240) + 19(180 + 210) + 20(300 + 280) + 11(110 + 100)}{20(200 + 240) + 22(180 + 210) + 20(300 + 280) + 9(110 + 100)} \times 100\%$

$$= 104.7\%$$

b) $Marshall(Q) = \frac{240(20 + 25) + 210(22 + 19) + 280(20 + 20) + 100(9 + 11)}{200(20 + 25) + 180(22 + 19) + 300(20 + 20) + 110(9 + 11)} \times 100\%$

$$= 106.64\%$$

تعاريف

- 1- في مصنع للمعلبات ينتج خمسة أنواع من المعلبات كانت أسعار وكميات عامي 1999, 2000 كالآتي:

| السلعة | سعر الوحدة بالدينار | | الكمية بالطن | |
|----------|---------------------|----------|--------------|----------|
| | عام 1999 | عام 2000 | عام 1999 | عام 2000 |
| فول | 0.20 | 0.23 | 150 | 200 |
| حمص | 0.25 | 0.27 | 100 | 250 |
| بندورة | 0.12 | 0.15 | 110 | 300 |
| فاصولياء | 0.30 | 0.35 | 120 | 350 |
| بازيلاء | 0.25 | 0.30 | 130 | 220 |

أوجد ما يلي باعتبار سنة 1999 هي سنة الأساس:

- (a) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار.
 (b) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار.
 (c) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات.
 (d) الرقم القياسي النسبي البسيط للكميات.

- 2- فيما يلي جدول يبين أسعار وكميات مبيعات مجموعة من السلع في عامي 2000, 2003.

| السلعة | سعر الوحدة بالدينار | | كمية المبيعات | |
|--------|---------------------|----------|---------------|----------|
| | عام 2000 | عام 2003 | عام 2000 | عام 2003 |
| a | 40 | 52 | 300 | 250 |
| b | 28 | 32 | 400 | 480 |
| c | 21 | 27 | 500 | 560 |
| d | 16 | 18 | 700 | 770 |
| e | 36 | 232 | 800 | 1000 |

احسب ما يلي باعتبار عام 2000 هو عام الأساس:

- (a) رقم لاسبير للأسعار.
 (b) رقم باش للأسعار.
 (c) رقم فشر للأسعار.
 (d) رقم مارشال للأسعار.

3- الجدول التالي يمثل أسعار وكميات خمس سلع في عامي 1999, 2002.

| السلعة | سعر الوحدة بالدينار | | الكمية | |
|--------|---------------------|----------|----------|----------|
| | عام 1999 | عام 2002 | عام 1999 | عام 2002 |
| a | 10 | 20 | 30 | 40 |
| b | 18 | 20 | 22 | 24 |
| c | 40 | 45 | 50 | 55 |
| d | 10 | 11 | 12 | 13 |
| e | 9 | 13 | 17 | 19 |

احسب ما يلي باعتبار عام 1999 هي سنة الأساس:

- (a) رقم لاسبير للكميات.
 (b) رقم باش للكميات.
 (c) رقم فشر للكميات.
 (d) رقم مارشال للكميات.

4- إذا كان لدينا سلعتين كالعذس والقمح. وكان سعر العذس في سنة المقارنة ضعف ما كان عليه في سنة الأساس والكمية المستهلكة من العذس نصف ما كانت عليه في سنة الأساس، ولم يطرأ تغير على السعر والكمية ما بين سنة المقارنة والأساس للقمح. فما هو الرقم القياسي للأسعار والمرجح بالكميات؟

5- ما هو الرقم القياسي لسلعة ما في سنة 2005 مقارنة بنفس السنة؟

6- الجدول التالي يبين أسعار وكميات السيارات المباعة لدى تاجر سيارات في الفترة 1995-1997:

| السلعة | سعر السيارة بالدينار | | | عدد السيارات المباعة | | |
|--------|----------------------|-------|-------|----------------------|------|------|
| | 1995 | 1996 | 1997 | 1995 | 1996 | 1997 |
| a | 7000 | 8000 | 8200 | 20 | 30 | 45 |
| b | 10000 | 14000 | 14000 | 40 | 35 | 50 |
| c | 25000 | 32000 | 34000 | 15 | 20 | 30 |

احسب باعتبار عامي 1995,1996 هما الأساس:

(a) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار والكميات.

(b) الرقم القياسي النسبي البسيط للأسعار والكميات.

(c) رقم لاسبير للأسعار.

(d) رقم باش للأسعار.

(e) رقم فشر للأسعار.

تحسب قيمة سنة الأساس هنا على أنها الوسط الحسابي لسنتي 1995,1996.

7- إذا كان رقم لاسبير للأسعار يساوي %110. ورقم فشر للأسعار يساوي %115. أوجد رقم باش للأسعار؟

8- إذا كانت الأجور اليومية لثلاثة عمال سنة 2004 هي بالدينار 6,5,7 وكانت الأرقام القياسية المقابلة للأجور اليومية لهؤلاء العمال 120,100,87.5 على الترتيب باعتبار سنة 2003 هي الأساس. جد معدل الأجور اليومية لهؤلاء العمال سنة 2003؟

9- إذا كان معدل تكاليف المعيشة ومعدل دخل الفرد في عام 1995 هو (100) ديناراً، (180) ديناراً شهرياً على الترتيب وأصبح في عام 2000 (350) ديناراً، (250) ديناراً. فما هي القوى الشرائية لدخل الفرد في عام 2000 باعتبار عام 1995 هو الأساس. (فسر إجابتك).

10- الجدول التالي يمثل معدل أسعار وعدد الأسهم المباعة لأربع شركات بين شهري آب وتموز من عام 1997.

| الشركة | سعر السهم بالدينار | | عدد الأسهم المباعة | |
|----------|--------------------|------|--------------------|------|
| | آب | تموز | آب | تموز |
| الأردنية | 1 | 1.25 | 1000 | 500 |
| الوطنية | x | 0.8 | 2000 | 1500 |
| العربية | 2 | 2.5 | 200 | 300 |
| الدولية | 1.5 | y | 1300 | 1300 |

إذا كان رقم لاسبير للأسعار = 100.95٪، ورقم باش للأسعار = 101.12٪ أوجد سعر سهم الشركة الوطنية في شهر آب من عام 1997، وسعر سهم الشركة الدولية في شهر تموز من عام 1997.



الوحدة التاسعة
السلاسل الزمنية
Time Series

السلاسل الزمنية

Time Series

مقدمة

إذا أخذنا كميات المطر في أحد أشهر الشتاء لعدة سنوات متتالية فإن هذه الكميات تشكل سلسلة زمنية، ومن هذه السلسلة الزمنية يمكن التنبؤ بكمية المطر في ذلك الشهر لسنوات لاحقة بناء على بيانات السنوات السابقة.

تعريف:

السلسلة الزمنية هي مجموعة مشاهدات أخذت على فترات زمنية متلاحقة ويفضل تساوي الفترات الزمنية التي تأخذ فيها المشاهدات.

من الأمثلة على السلاسل الزمنية: أخذ كمية الفوسفات التي يصدرها الأردن سنوياً في سنوات متتالية، مبيعات أحد المتاجر لمدة عشرة أعوام متتالية.

من استعمالات السلاسل الزمنية:

(a) التنبؤ بالمستقبل باستعمال البيانات الإحصائية التي أخذت في الماضي.

(b) اكتشافات الدورات التي تتكرر فيها البيانات.

(c) اكتشاف الطفرات الاقتصادية التي تحصل في زمن ما.

تمثيل السلسلة الزمنية بيانياً Graphs of time series

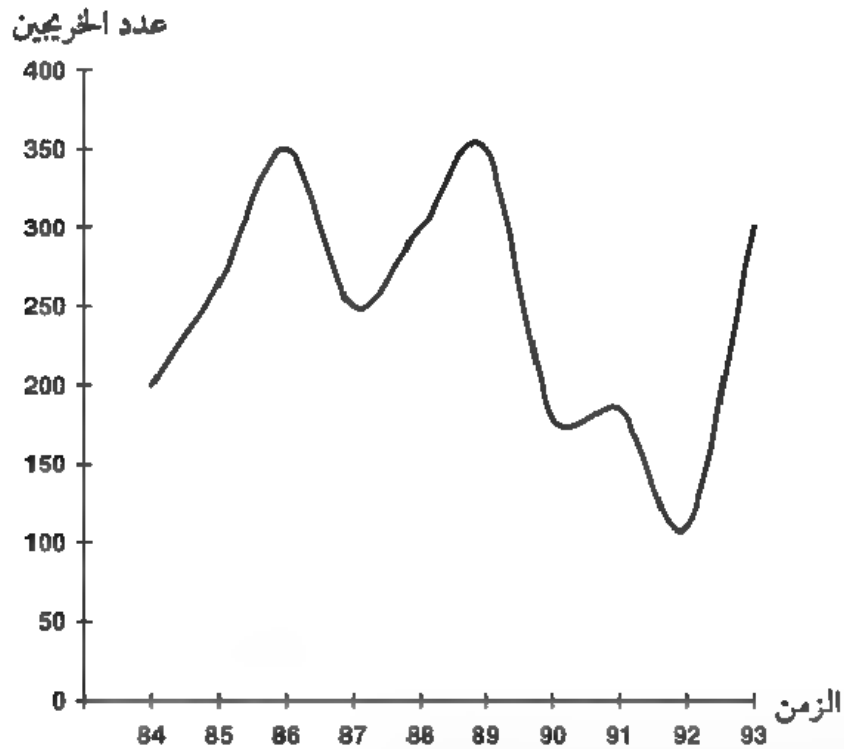
يمكن تمثيل السلسلة الزمنية بيانياً بتعيين أزواج مرتبة (الزمن، قيمة الظاهرة) في المستوى البياني ثم توصيل تلك النقاط. ويسمى المنحنى الناتج المنحنى التاريخي (Historical curve) للسلسلة الزمنية.

مثال:

ارسم المنحنى التاريخي الذي يمثل السلسلة الزمنية لعدد خريجي إحدى كليات المجتمع خلال السنوات 1984-1993.

| السنة | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| عدد الخريجين | 200 | 265 | 350 | 250 | 300 | 350 | 180 | 185 | 110 | 300 |

الحل:



معامل الخشونة والمتوسطات المتحركة

Roughness Coefficient and moving average

إذا نظرنا إلى المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية في المثال السابق لأعداد الخريجين من إحدى كليات المجتمع، نرى أنها ترتفع في بعض السنوات وتنخفض في سنوات أخرى وهذا التذبذب يسمى خشونة السلسلة الزمنية وحساب خشونة سلسلة زمنية ما نستخدم مقياس يسمى معامل الخشونة (R.C):

$$R.C = \frac{\sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

حيث x_i : الملاحظة رقم (i) في السلسلة الزمنية.

وكلما قل معامل الخشونة كانت السلسلة ملساء أكثر.

مثال:

احسب معامل الخشونة للسلسلة.

9, 0, 3, 9, 6, 3, 9, 0, 6

الحل:

في البداية نجد الوسط الحسابي للسلسلة

$$\bar{x} = \frac{6 + 0 + 9 + 3 + 6 + 9 + 3 + 0 + 9}{9} = 5$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^9 (x_i - x_{i-1})^2 &= (0-6)^2 + (9-0)^2 + (3-9)^2 + (6-3)^2 + (9-6)^2 \\ &\quad + (3-9)^2 + (0-3)^2 + (9-0)^2 \\ &= 36+81+36+9+9+36+9+81 \\ &= 297 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^9 (x_i - \bar{x})^2 &= (0-5)^2 + (9-5)^2 + (3-5)^2 + (6-5)^2 \\ &\quad + (9-5)^2 + (3-5)^2 + (0-5)^2 + (9-5)^2 \\ &= 25 + 16 + 4 + 1 + 16 + 4 + 25 + 16 \\ &= 107 \end{aligned}$$

$$R.C = \frac{297}{107} = 2.78$$

نرى هنا أن معامل الخشونة كبير نسبياً ولذلك تكون الدراسة الإحصائية التي يمكن أن تجرى على هذه السلسلة غير دقيقة النتائج وسيكون تحليلها صعب نوعاً ما. ولذلك لا بد من تقليل معامل الخشونة وذلك عن طريق إيجاد معدلات متحركة بطول محدد لتكون سلسلة أخرى أقل تذبذباً.

فإذا أردنا إيجاد معدلات متحركة بطول (m) سنرمز له بالرمز $\bar{Mav}(m)$ فإن هذا المعدل يكون

$$\bar{Mav}(m) = \frac{X_r + X_{r+1} + \dots + X_{r+(m-1)}}{m} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

فمثلاً إذا أردنا إيجاد معدل متحرك للسلسلة السابقة بطول (3) فإن هذا المعدل يكون

$$\bar{Mav}(3) = \frac{X_r + X_{r+1} + X_{r+2}}{3}$$

وبالتالي نجد عناصر السلسلة الجديدة وهي

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{6 + 0 + 9}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\frac{X_2 + X_3 + X_4}{3} = \frac{0 + 9 + 3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{X_3 + X_4 + X_5}{3} = \frac{9 + 3 + 6}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\frac{X_4 + X_5 + X_6}{3} = \frac{3 + 6 + 9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\frac{X_5 + X_6 + X_7}{3} = \frac{6 + 9 + 3}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\frac{X_6 + X_7 + X_8}{3} = \frac{9 + 3 + 0}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{X_7 + X_8 + X_9}{3} = \frac{3 + 0 + 9}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

وبالتالي تصبح السلسلة الجديدة هي:

5, 4, 6, 6, 6, 4, 4

ولحساب معامل الخشونة لهذه السلسلة سيكون وسطها الحسابي هو:

$$\bar{X} = \frac{5+4+6+6+6+4+4}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

ويكون معامل الخشونة R.C هو:

$$R.C = \frac{\sum_{i=2}^7 (x_i - x_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^7 (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^7 (x_i - x_{i-1})^2 &= (4-5)^2 + (6-4)^2 + (6-6)^2 + (6-6)^2 \\ &\quad + (4-6)^2 + (4-4)^2 \\ &= 1 + 4 + 0 + 0 + 4 + 0 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 &= (5-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (6-5)^2 + (6-5)^2 \\ &\quad + (4-5)^2 + (4-5)^2 \\ &= 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\therefore R.C = \frac{9}{6} = 1.5$$

ملاحظة: عدد الأوساط المتحركة بطول (m) هو $k=n-(m-1)$

حيث n عدد مفردات السلسلة الأصلية

K عدد الأوساط المتحركة

مركبات السلاسل الزمنية

السلسلة الزمنية تتكون من أربع مركبات هي:

- 1- مركبة الاتجاه (Secular Trend): وتمثل الاتجاه للسلسلة ويكون التقدير الأفضل لها عن طريق معادلة خط المحدار قيمة الظاهرة x على الزمن t .
 - 2- مركبة الدورة (Cyclical movements): تمثل فترة تغير البيانات لمدة طويلة قد تزيد عن السنة.
 - 3- المركبة الفصلية (Seasonal movements): وهي التغيرات المنتظمة التي تظهر في الفصول والفصول قد تكون ربع سنوية أو شهرية أو أسبوعية.
 - 4- مركبة الخطأ (أو المركبة العشوائية) (Irregular or random movements): نصف ما تبقى من العوامل التي لم تدخل في المركبات السابقة كالزواج الاقتصادي غير المتوقع في إحدى سنوات السلسلة الزمنية أو الركود نتيجة لكوارث.
- ويقصد بتحليل السلسلة الزمنية هو إظهار تأثير إحدى المركبات السابقة بعد إلغاء تأثير المركبات الأخرى.

تقدير مركبة الاتجاه (Estimation of secular trend)

تقدر مركبة الاتجاه بعدة طرق منها:

a- طريقة المربعات الصغرى (Least squares method)

وهي إيجاد معادلة خط المحدار قيمة الظاهرة x على الزمن t وتسمى معادلة الاتجاه العام (Equation of trend).

وهي

$$x = a t + b$$

حيث

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k x_i t_i - k x \bar{t}}{\sum_{i=1}^k t_i^2 - k (\bar{t})^2}$$

$$b = \bar{x} - a \bar{t}$$

x: قيمة الظاهرة

t : الزمن

k: عدد قيم الظاهرة

وبعد إيجاد معادلة الاتجاه العام يمكن تقدير قيم الظاهرة عن طريقها.

مثال:

الجدول التالي يمثل إنتاج أحد المصانع بآلاف الدينار في الفترة (1980-1989):

| السنة | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| الإنتاج | 200 | 235 | 195 | 210 | 245 | 200 | 220 | 260 | 230 | 245 |

أوجد معادلة الاتجاه العام ثم اكتب الإنتاج التقديري للمصنع في جميع السنوات؟

الحل:

لسهولة التعامل نعطي السنوات ترقيم من 1 إلى 10 (أي نطرح 1979 من كل سنة) ونجد معادلة الاتجاه العام

$$x = a t + b$$

| الزمن t | الإنتاج x | xt | t ² |
|---------|-----------|-------|----------------|
| 1 | 200 | 200 | 1 |
| 2 | 235 | 470 | 4 |
| 3 | 195 | 585 | 9 |
| 4 | 210 | 840 | 16 |
| 5 | 245 | 1225 | 25 |
| 6 | 200 | 1200 | 36 |
| 7 | 220 | 1540 | 49 |
| 8 | 260 | 2080 | 64 |
| 9 | 230 | 2070 | 81 |
| 10 | 245 | 2450 | 100 |
| 55 | 2240 | 12660 | 385 |

$$\bar{x} = 224, \bar{t} = 5.5$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k x_i t_i - k \bar{x} \bar{t}}{\sum_{i=1}^k t_i^2 - k(\bar{t})^2}$$

$$= \frac{12660 - 10(224)(5.5)}{385 - 10(5.5)^2}$$

$$= 4.12$$

$$b = \bar{x} - a\bar{t}$$

$$= 224 - (4.12)(5.5)$$

$$= 201.34$$

وتكون معادلة الاتجاه العام هي:

$$x = 4.12(t) + 201.34$$

ولتقدير إنتاج المصنع نطبق في معادلة الاتجاه العام.

$$x = 4.12(1) + 201.34 \quad \text{فإن } t = 1 \text{ عندما}$$

$$= 205.46$$

$$x = 4.12(2) + 201.34 \quad \text{عندما } t = 2 \text{ فإن}$$

$$= 209.58$$

ونستمر هكذا حتى نحصل على كل القيم المقررة لـ x فنحصل على العمود التالي:

| الزمن t | قيمة x المقدرة |
|-----------|------------------|
| 1 | 205.46 |
| 2 | 209.58 |
| 3 | 213.7 |
| 4 | 217.82 |
| 5 | 221.94 |
| 6 | 226.06 |
| 7 | 230.18 |
| 8 | 234.3 |
| 9 | 238.42 |
| 10 | 242.54 |

مثال:

الجدول التالي يمثل الإنتاج الصناعي لإحدى الدول بملايين الدولارات في الفترة (1974-1980)

| السنة | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 | 1978 | 1979 | 1980 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|
| الإنتاج الصناعي | 101 | 95 | 104 | 108 | 106 | 111 | 117 |

- 1- أوجد معادلة الاتجاه العام.
- 2- قدر الإنتاج الصناعي لكل سنة.
- 3- ما هو الإنتاج المتوقع للدولة سنة 1985.

الحل:

| الزمن t | الإنتاج x | tx | t ² |
|---------|-----------|------|----------------|
| 1 | 101 | 101 | 1 |
| 2 | 95 | 190 | 4 |
| 3 | 104 | 312 | 9 |
| 4 | 108 | 432 | 16 |
| 5 | 106 | 530 | 25 |
| 6 | 111 | 666 | 36 |
| 7 | 117 | 819 | 49 |
| 28 | 742 | 3050 | 140 |

$$1) \quad \bar{x} = \frac{742}{7} = 106$$

$$\bar{t} = \frac{28}{7} = 4$$

$$a = \frac{\sum xt - k\bar{x}\bar{t}}{\sum t^2 - k(\bar{t})^2}$$

$$= \frac{3050 - (7)(106)(4)}{140 - 7(4)^2} = 2.93$$

$$b = \bar{x} - a\bar{t}$$

$$= 106 - (2.93)(4)$$

$$= 94.3$$

∴ معادلة خط الانحدار (معادلة الاتجاه العام) هي

$$x = 2.93t + 94.3$$

2- لإيجاد الإنتاج الصناعي المقدر نعوض في المعادلة السابقة للحصول على الجدول:

| السنة | الزمن t | الإنتاج الصناعي المقدر |
|-------|---------|------------------------|
| 1974 | 1 | 97.23 |
| 1975 | 2 | 100.16 |
| 1976 | 3 | 103.09 |
| 1977 | 4 | 106.02 |
| 1978 | 5 | 108.95 |
| 1979 | 6 | 111.88 |
| 1980 | 7 | 114.81 |

3- سنة 1985 تقابل الترتيب $t = 12$

$$x = (2.93)(12) + 94.3$$

$$= 129.43 \text{ million \$}$$

فيقدر الإنتاج

b- طريقة التمهيد باليد (Free hand method)

وتتم هذه الطريقة برسم خط مستقيم متوافق مع نقاط المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية، وهي طريقة تعتمد على مهارة الذي يرسم ذلك المستقيم، ولذلك تعتبر طريقة غير دقيقة.

وبعد رسم المستقيم نجد معادلته عن طريق نقطتين عليه.

وتكون معادلة المستقيم هي معادلة الاتجاه العام.

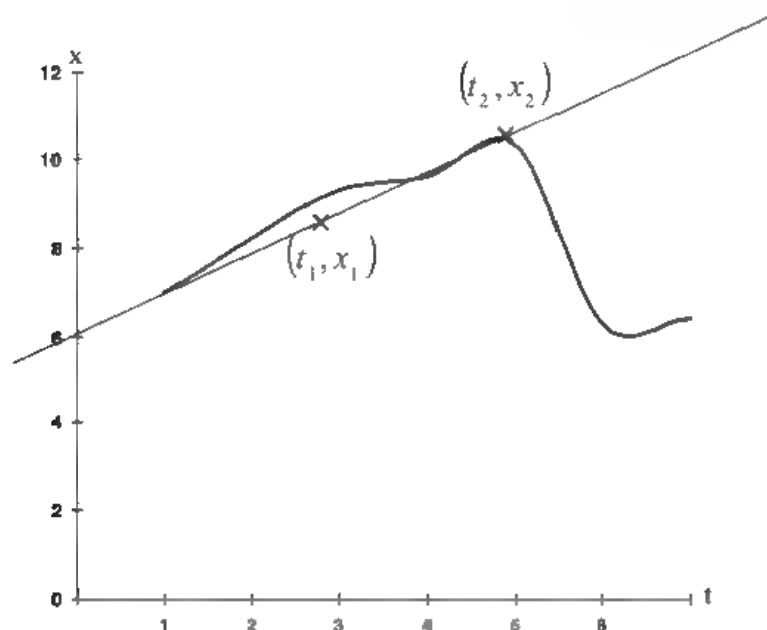
مثال:

الجدول التالي يمثل ميزانية التعليم العالي بملايين الدنانير للفترة (1986-1992)

| الزمن t | موازنة الوزارة | السنة |
|---------|----------------|-------|
| 1 | 7 | 1986 |
| 2 | 8.2 | 1987 |
| 3 | 9.3 | 1988 |
| 4 | 9.6 | 1989 |
| 5 | 10.3 | 1990 |
| 6 | 6.3 | 1991 |
| 7 | 6.4 | 1992 |

(a) جد معادلة الاتجاه؟

(b) قدر ميزانية الوزارة في كل سنة من سنوات الجدول؟



نجد في البداية ميل الخط المستقيم وهو:

$$m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 - 8}{4.5 - 2.3} = \frac{2}{2.2} = 0.91$$

وتكون معادلة خط المستقيم هي:

$$\begin{aligned} (x - x_1) &= m(t - t_1) \\ (x - 8) &= 0.91(t - 2.3) \\ x - 8 &= 0.91t - 2.09 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 0.91t + 5.91$$

(معادلة الاتجاه العام)

| السنة | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
|-------------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| الميزانية المقدرة | 6.82 | 7.73 | 8.64 | 9.55 | 10.46 | 11.37 | 12.28 |

C- طريقة نصف السلسلة (Semi-averages method)

وتتم هذه الطريقة بقسم السلسلة إلى نصفين متساويين نجد الوسط الحسابي للنصف الأول بحيث تشكل نقطة في المستوى البياني، الإحداثي الأفقي لها هو الوسط

الحسابي لقيم الزمن (\bar{t}_1) والإحداثي العمودي هو الوسط الحسابي لقيم الظاهرة (\bar{x}_1) في ذلك النصف، ونقوم بنفس العملية للنصف الآخر فنحصل على نقطتين هما (t_1, \bar{x}_1) و (t_2, \bar{x}_2) ثم نجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين السابقتين وتكون هي معادلة الاتجاه العام.

مثال:

الجدول التالي يمثل أعداد الطلبة بآلاف والذين يدرسون خارج الأردن خلال الفترة (1988-1993).

| السنة | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|
| عدد الطلبة بالآلاف | 36 | 35.6 | 32.8 | 35.8 | 35 | 31.9 |

الحل:

| السنة | أعداد الطلبة | الزمن t | متوسط الزمن t | متوسط أعداد الطلبة x |
|-------|--------------|------------|------------------|-------------------------|
| 1988 | 36 | 1 | $\bar{t}_1 = 2$ | $\bar{x}_1 = 34.8$ |
| 1989 | 35.6 | 2 | | |
| 1990 | 32.8 | 3 | | |
| 1991 | 35.8 | 4 | | |
| 1992 | 35 | 5 | $\bar{t}_2 = 5$ | $\bar{x}_2 = 34.23$ |
| 1993 | 31.9 | 6 | | |

نجد ميل الخط المستقيم

$$m = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1} = \frac{34.23 - 34.8}{5 - 2} = -0.19$$

معادلة الخط المستقيم

$$x - \bar{x}_1 = m(t - \bar{t}_1)$$

$$x - 34.8 = -0.19(t - 2)$$

$$x - 34.8 = -0.19t + 0.38$$

$$x = -0.19t + 35.18$$

$$x = 35.18 - 0.19t$$

وتكون معادلة الاتجاه العام هي:

سؤال: في المثال السابق اكتب أعداد الطلبة المقدرة لكل سنة من السنوات

1988-1993.

ملاحظة:

إذا كان عدد عناصر السلسلة فردي فإننا نحذف القيمة الموجودة في منتصف السلسلة وناخذ الأوساط للقيم المتبقية، فمثلاً إذا كان عدد عناصر السلسلة (9) فإننا نأخذ المتوسط لأول أربع قيم والمتوسط لآخر أربع قيم ونحذف القيمة الخامسة.

d- طريقة المتوسطات المتحركة (Moving averages method)

تتلخص هذه الطريقة بإيجاد الأوساط (المتوسطات) المتحركة بطول مناسب للسلسلة الزمنية فينتج لدينا سلسلة زمنية أخرى من المتوسطات المتحركة. ويكون أثر الاتجاه العام فيها ظاهراً بشكل أفضل من السلسلة الزمنية الأصلية. ثم نقدر الاتجاه العام بإحدى الطرق آنفة الذكر.

مثال:

الجدول التالي يمثل أعداد الطلبة بآلاف والمسجلين في إحدى كليات المجتمع

خلال الفترة 1985-1994.

| السنة | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| عدد الطلاب بآلاف | 2 | 3 | 1 | 4 | 6 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 |

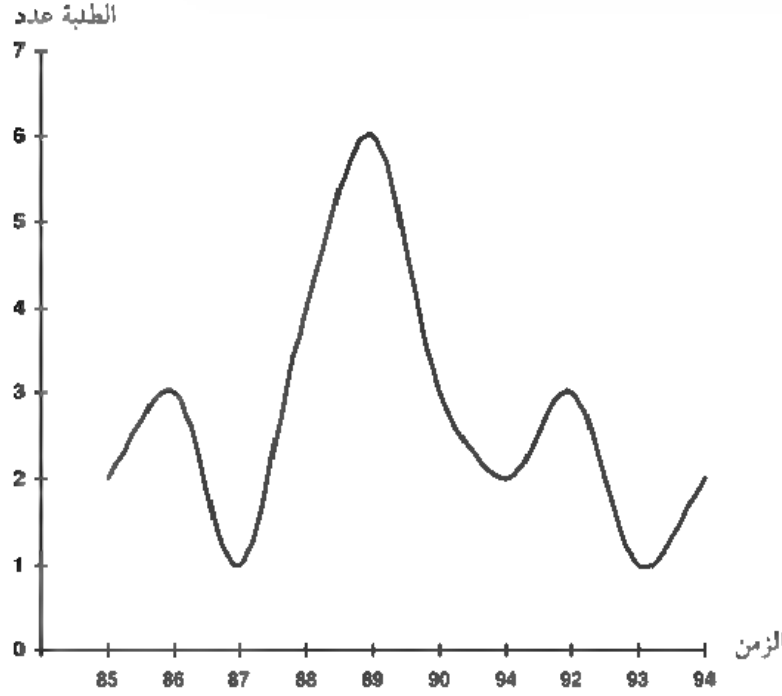
1- ارسم المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

2- أوجد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

- 3- أوجد سلسلة المعدلات المتحركة بطول (3). وأرسم المنحنى التاريخي لها.
4- أوجد معادلة الاتجاه العام لسلسلة المعدلات المتحركة.

الحل:

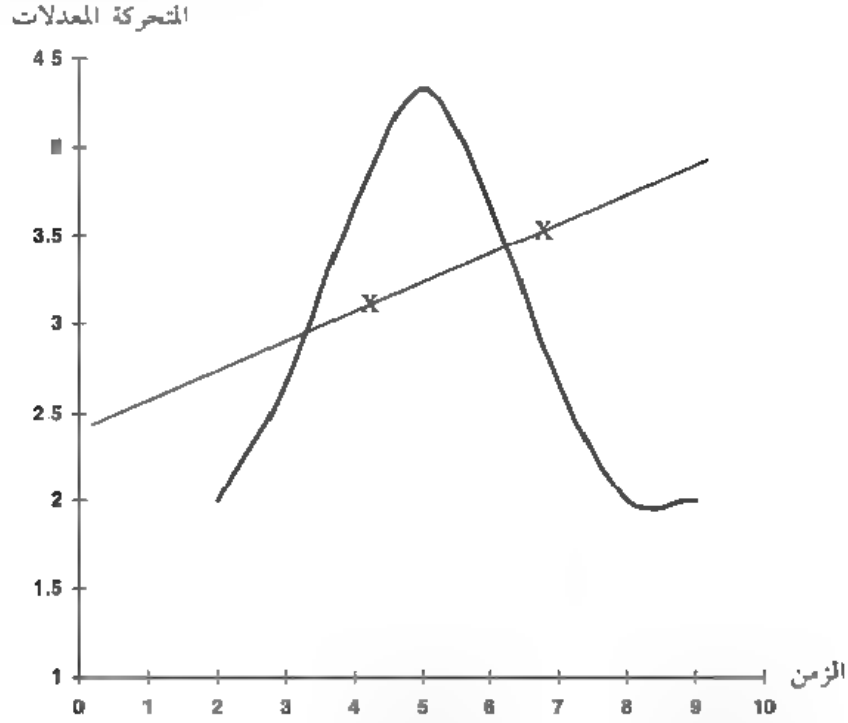
-1



-2 تمرين.

- 3- نجد المعادلات المتحركة بطول (3) للسلسلة الزمنية.

| الزمن t | السنة | عدد الطلبة بالآلاف | المعدلات المتحركة |
|---------|-------|--------------------|-------------------|
| 1 | 1985 | 2 | - |
| 2 | 1986 | 3 | 2 |
| 3 | 1987 | 1 | 2.67 |
| 4 | 1988 | 4 | 3.67 |
| 5 | 1989 | 6 | 4.33 |
| 6 | 1990 | 3 | 3.67 |
| 7 | 1991 | 2 | 2.67 |
| 8 | 1992 | 3 | 2 |
| 9 | 1993 | 1 | 2 |
| 10 | 1994 | 2 | - |



4- نجد معادلة الاتجاه العام بطريقة التمهيد باليد ويكون أفضل خط مستقيم يمر بالنقطتين (3.5, 7) , (4, 3) " لذلك تكون معادلة الاتجاه العام هي:

$$\frac{x-3}{t-4} = \frac{3.5-3}{7-4}$$

$$\frac{x-3}{t-4} = \frac{0.5}{3}$$

$$\frac{x-3}{t-4} = \frac{1}{6}$$

بالضرب التبادلي ينتج أن

$$6x - 18 = t - 4$$

$$6x = t + 14$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}(t + 14)$$

سؤال: جد معادلة الاتجاه لسلسلة المتوسطات المتحركة بطريقة أخرى؟

ملاحظة: عند إيجاد سلسلة المتوسطات المتحركة بطول m يكون أول وسط متحرك مقابل وسيط أول m من الأزمنة.

ففي مثالنا السابق لو كان الطول المتحرك 4 فيكون الوسط الحسابي المتحرك الأول مقابل وسيط السنوات 1985، 1986، 1987، 1988 أي منتصف عام 86.

تقدير المركبة الفصلية: Estimating Seceonal movement

هنالك أربع طرق لتقدير مركبة الفصل وهي:

أ- طريقة النسبة المئوية للمعدل (Average percentage method)

ب- طريقة النسبة إلى الاتجاه العام (Ratio to trend method)

ج- طريقة النسبة إلى المتوسطات المتحركة

(Ration to moving averages method)

د- طريقة الوصل النسبية (the link relative method)

وسنكتفي في هذا الكتاب بعرض الطريقة الأولى والتي سنوضحها في المثال التالي:

مثال:

الجدول التالي يبين المبيعات الشهرية لأحد المتاجر بمئات الدنانير للسنوات (1993-1997):

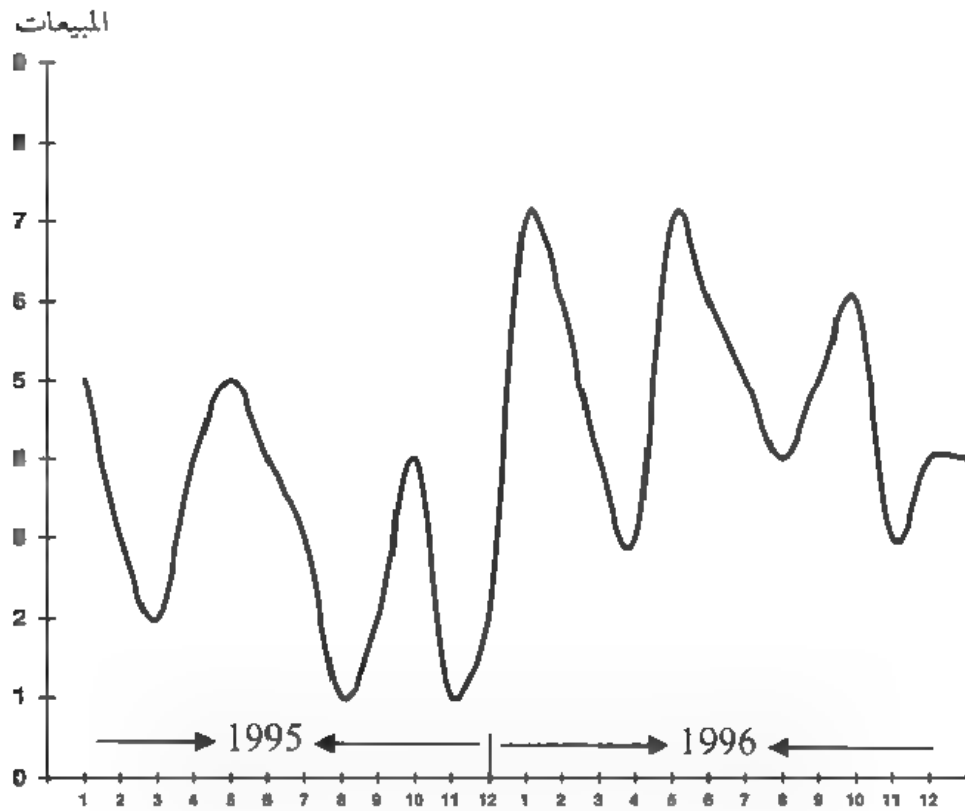
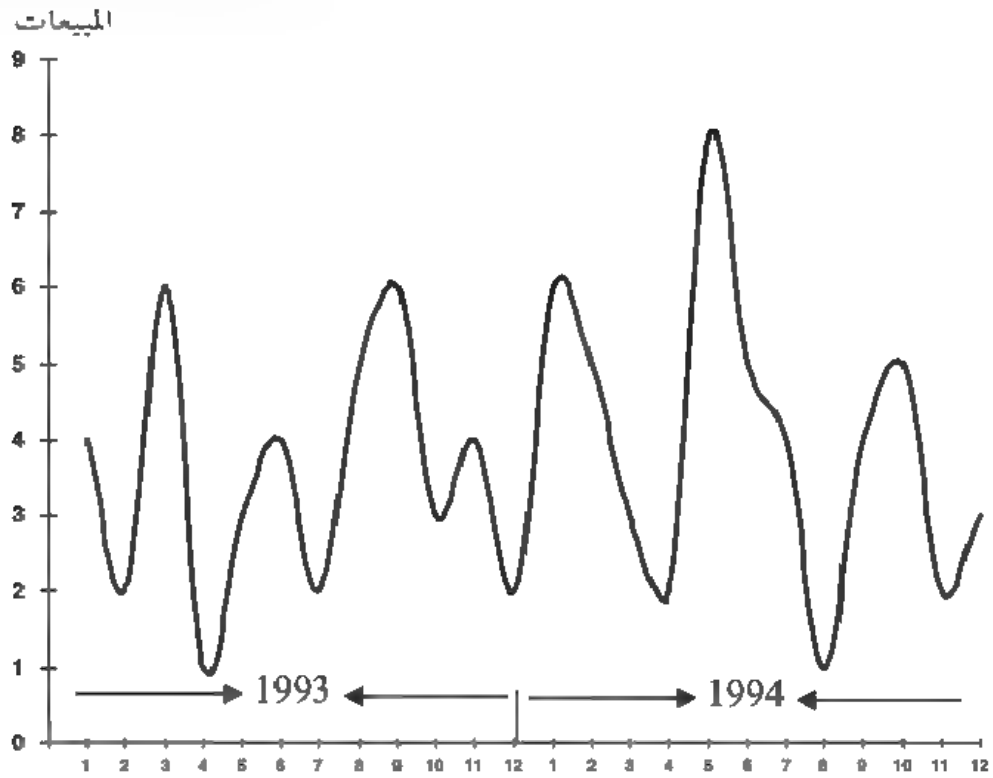
| الشهر السنة | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1993 | 4 | 2 | 6 | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 3 | 4 | 2 |
| 1994 | 6 | 5 | 3 | 2 | 8 | 5 | 4 | 1 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| 1995 | 5 | 3 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| 1996 | 7 | 6 | 4 | 3 | 7 | 6 | 5 | 4 | 5 | 6 | 3 | 4 |
| 1997 | 3 | 2 | 5 | 4 | 1 | 4 | 5 | 8 | 2 | 3 | 5 | 6 |

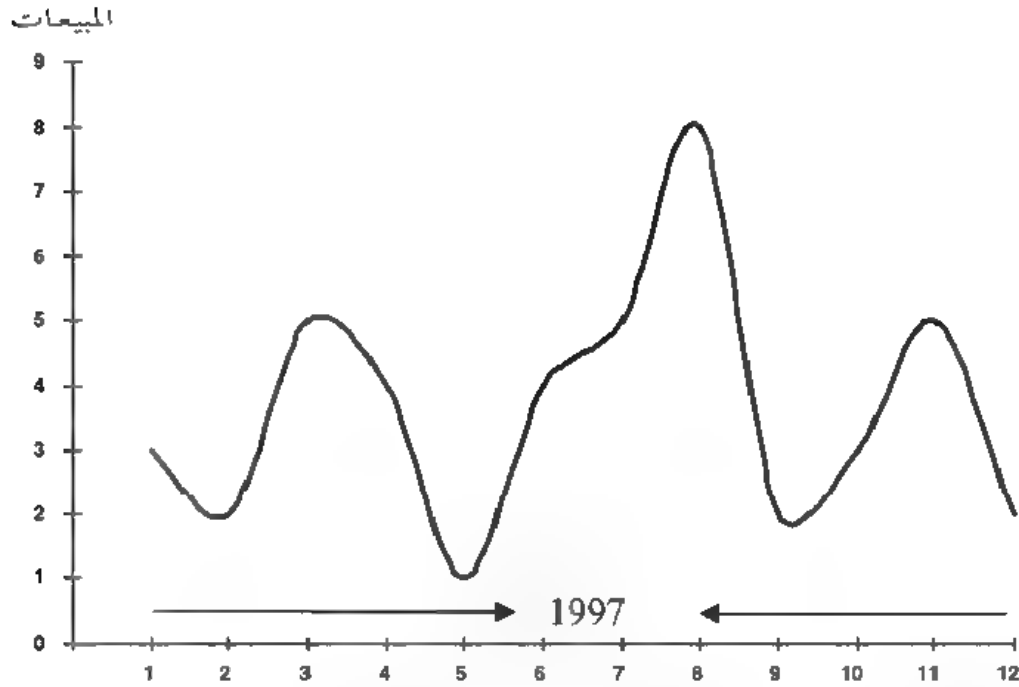
(a) أرسم المنحنى التاريخي للسلسلة.

(b) حلل مركبة الفصل بطريقة النسبة المئوية للمعدل.

الحل:

a- (لاحظ أن الفصل هنا عبارة عن شهر)





b- أولاً: نحدد المعدل الشهري (الفصلي) للمبيعات لكل سنة على حدة والجدول التالي يبين مجموع المبيعات السنوي وكذلك معدل المبيعات الشهري لكل سنة:

| السنة | المجموع | المعدلات الشهرية |
|-------|---------|------------------|
| 1993 | 42 | 3.5 |
| 1994 | 48 | 4 |
| 1995 | 36 | 3 |
| 1996 | 60 | 5 |
| 1997 | 48 | 4 |

ثانياً: نحدد الرقم القياسي الفصلي ويعطى بالعلاقة

$$\text{الرقم القياسي الفصلي} = \frac{\text{قيمة الظاهرة في سنة ما}}{\text{المعدل الفصلي لتلك السنة}} \times 100\%$$

وفي مثالنا هذا يكون:

$$\text{الرقم القياسي الشهري} = \frac{\text{قيمة المبيعات الشهرية في سنة ما}}{\text{المعدل الشهري لتلك السنة}} \times 100\%$$

وبتطبيق العلاقة على شهر (1) من سنة 1993 يكون:

$$\%114.3 = \%100 \times \frac{4}{3.5}$$

والجدول التالي يعطي الرقم القياسي للأشهر المختلفة لكل سنة:

| الشهر | السنة | | | | |
|-------|-------|------|-------|------|------|
| | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 |
| 1 | 114.3 | 150 | 166.7 | 140 | 75 |
| 2 | 57.1 | 125 | 100 | 120 | 50 |
| 3 | 171.4 | 75 | 66.7 | 80 | 125 |
| 4 | 28.6 | 50 | 133.3 | 60 | 100 |
| 5 | 85.7 | 200 | 166.7 | 140 | 25 |
| 6 | 114.3 | 125 | 133.3 | 120 | 100 |
| 7 | 57.1 | 100 | 100 | 100 | 125 |
| 8 | 142.9 | 25 | 33.3 | 80 | 200 |
| 9 | 171.4 | 100 | 66.7 | 100 | 50 |
| 10 | 85.7 | 125 | 133.3 | 120 | 75 |
| 11 | 114.3 | 50 | 33.3 | 60 | 125 |
| 12 | 57.1 | 75 | 66.7 | 80 | 150 |

ثالثاً: نجد معدل كل فصل لكافة السنوات.

أي في مثالنا نجد معدل مبيعات شهر (1) للسنوات 1993-1997 يكون:

$$\frac{114.3 + 150 + 166.7 + 140 + 75}{5}$$

$$= \frac{646}{5}$$

$$= 129.2$$

والجدول التالي يبين مجموع الأرقام القياسية الشهرية لكل شهر من أشهر السنة

للسنوات المختلفة ومعدلاتها:

| العدد | المجموع الشهري | الشهر |
|---------|----------------|---------|
| 1 | 646 | 129.20 |
| 2 | 452.1 | 90.42 |
| 3 | 518.1 | 103.62 |
| 4 | 371.9 | 74.38 |
| 5 | 617.4 | 123.48 |
| 6 | 592.6 | 118.52 |
| 7 | 482.1 | 96.42 |
| 8 | 481.2 | 96.24 |
| 9 | 488.2 | 97.62 |
| 10 | 539 | 107.80 |
| 11 | 382.6 | 76.52 |
| 12 | 428.8 | 85.76 |
| المجموع | | 1199.98 |

ملاحظات:

- 1- يجب أن يكون مجموع المعدلات الفصلية للسنوات المختلفة مساوياً عدد الفصول $100 \times$ وفي مثالنا هذا كان عدد الفصول في السنة "عدد الأشهر" (12) فصلاً وبالتالي يجب أن يكون مجموع العمود الأخير = 1200.
- 2- إذا اختلف مجموع المعدلات الفصلية للسنوات عن عدد الفصول $100 \times$ يكون السبب في ذلك راجعاً إلى مركبة الخطأ. وإذا كان الاختلاف كبيراً يكون تأثير مركبة الخطأ كبيراً ولذلك يجب تعديل المعدلات الفصلية بضرب كل معدل في المقدار.

عدد الفصول $100 \times$

مجموع المعدلات الفصلية

وذلك حتى نقلل من تأثير مركبة الخطأ.

ففي مثالنا السابق نلاحظ أن الفرق بين 1200، 1199.98، هو 0.02 وهو قيمة صغيرة جداً، أي يمكن إهمال تأثير مركبة الخطأ.

تمارين

1- للسلسلة الزمنية التالية:

30، 39، 45، 47، 46، 43، 69، 57، 61، 67

أوجد ما يلي:

- معامل الخشونة لهذه السلسلة.
- سلسلة المعدلات المتحركة بطول 4.
- معامل الخشونة للسلسلة الناتجة في b.

2- الجدول التالي يمثل الكميات المصدرة لسلعة ما مقدرة بآلاف الدنانير، للفترة (1993-2002).

| السنة | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| الكمية المصدرة بآلاف الدنانير | 135 | 146 | 153 | 163 | 178 | 196 | 200 | 170 | 226 | 195 |

أوجد معادلة الاتجاه العام. بالطرق التالية:

- المربعات الصغرى.
- التمهيد باليد.
- نصف السلسلة.
- المتوسطات المتحركة.

3- ما المقصود بما يلي:

- السلسلة الزمنية.
- معامل الخشونة.
- تحليل السلسلة الزمنية.
- مركبة الاتجاه العام.

4- الجدول التالي يمثل أرباح متجر ما بآلاف الدنانير في الفترة (1998-2005).

| السنة | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| الأرباح | 70 | 75 | 78 | 83 | 85 | 81 | 89 | 80 |

أوجد ما يلي:

(a) معادلة الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى، ثم قدر الأرباح في الفترة (1998-2005).

(b) قدر أرباح هذا المتجر في سنة 2007.

5 في السؤال السابق ارسم المنحنى التاريخي للسلسلة ثم قدر الأرباح بطريقة المتوسطات المتحركة.

6- إذا علمت أن القيمة الحقيقية لظاهرة ما هي (8) في عام 1995، 6 في عام 1998، وإذا كانت القيمة المقدرة في هذه السنوات هي 7.7، 5.7 على التوالي، فما هي معادلة الاتجاه العام للفترة (1991-2000)؟

7- سلسلة زمنية عدد عناصرها (157)، جد عدد الأوساط المتحركة بطول (15)؟

8- الجدول التالي يبين معدل درجات الحرارة للفصول الأربعة للسنوات 1991-2000.

| السنة الفصل | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Spring | 20 | 22 | 25 | 21 | 24 | 23 | 25 | 20 |
| summer | 35 | 32 | 40 | 33 | 30 | 37 | 34 | 38 |
| Fall | 22 | 20 | 24 | 27 | 23 | 30 | 25 | 26 |
| winter | 4 | 6 | 10 | 7 | 5 | 3 | 12 | 8 |

حلل مركبة الفصل باستخدام طريقة النسب المئوية للمعدل.

9- إذا كانت معدلات الأرقام القياسية الفصلية لمركبة الفصل للفصول الأربعة للسنوات (1985-1995) معطاة بالجدول التالي:

| الفصل | winter | Fall | summer | spring |
|--------|--------|------|--------|--------|
| المعدل | 85 | 125 | 90 | 150 |

قلل من تأثير مركبة الخطأ. على هذه المعدلات؟

10- الجدولان التاليان يبينان المعدل الشهري لإنتاج مصنع بآلاف القطع للسنوات (1989 - 1996) ..

| السنوات الشهر | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
|------------------|------|------|------|------|
| كانون الثاني | 55 | 85 | 90 | 120 |
| شباط | 60 | 90 | 105 | 110 |
| آذار | 70 | 95 | 100 | 150 |
| نيسان | 65 | 120 | 130 | 140 |
| أيار | 80 | 100 | 120 | 140 |
| حزيران | 100 | 85 | 70 | 120 |
| تموز | 95 | 125 | 135 | 155 |
| آب | 105 | 120 | 140 | 150 |
| أيلول | 110 | 95 | 120 | 100 |
| تشرين أول | 100 | 60 | 70 | 65 |
| تشرين ثاني | 90 | 100 | 120 | 140 |
| كانون أول | 85 | 80 | 115 | 130 |

| السنوات الشهر | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 |
|------------------|------|------|------|------|
| كانون الثاني | 88 | 150 | 125 | 200 |
| شباط | 170 | 130 | 98 | 185 |
| آذار | 140 | 100 | 85 | 140 |
| نيسان | 135 | 150 | 140 | 200 |
| أيار | 190 | 110 | 123 | 170 |
| حزيران | 135 | 160 | 155 | 190 |
| تموز | 200 | 165 | 160 | 200 |
| آب | 195 | 170 | 165 | 195 |
| أيلول | 85 | 125 | 120 | 95 |
| تشرين أول | 80 | 100 | 95 | 105 |
| تشرين ثاني | 90 | 110 | 200 | 190 |
| كانون أول | 105 | 100 | 150 | 170 |

حلل مركبة الفصل باستخدام طريقة النسب المئوية للمعدل.

ملحق

(1)

رمز المجموع (Sigma Notation)

تعريف:

إذا كان $f(x)$ اقتران فيمكن التعبير عن

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

بالرمز

$$\sum_{r=1}^n f(r)$$

مثال:

اكتب ما يلي باستخدام رمز المجموع

a) $2 + 4 + \dots + 20$

b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{128}$

c) $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$

الحل:

a) $\sum_{r=1}^{10} 2r$

b) $\sum_{r=1}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^r$

c) $\sum_{r=1}^8 (-1)^r$

مثال:

$$\sum_{r=1}^4 r^2 \quad \text{جد قيمة}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^4 r^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \\ &= 30 \end{aligned}$$

خصائص رمز المجموع

$$1) \quad \sum_{r=1}^n [f(r) \cdot g(r)] = \sum_{r=1}^n f(r) \cdot \sum_{r=1}^n g(r)$$

$$2) \quad \sum_{r=1}^n a \cdot f(r) = a \sum_{r=1}^n f(r)$$

$$3) \quad \sum_{r=m}^n f(r) = \sum_{r=1}^n f(r) - \sum_{r=1}^{m-1} f(r)$$

$$4) \quad \sum_{r=m}^n f(r) = \sum_{r=m+s}^{n+s} f(r+s) - \sum_{r=m+s}^{n+s} f(r-s)$$

$$5) \quad \sum_{r=1}^n a = na$$

$$6) \quad \sum_{r=m}^n a = (n - m + 1)a$$

مبدأ العد

إذا أمكن إجراء عملية على مرحلتين بحيث تتم الأولى بـ (n) من الطرق والثانية بـ (m) من الطرق فإن:

1- العملية تتم بـ (n×m) من الطرق.

2- المرحلة الأولى أو الثانية تتم بـ (n+m) من الطرق.

مثال:

حل تجاري لديه ثلاث أنواع من القمصان وأربعة أنواع من البنطلونات فبكم طريقة يمكن أن يختار شخص:

(a) قميصاً وبنطلوناً.

(b) قميصاً أو بنطلوناً.

الحل:

$$(a) \quad 12 = 4 \times 3 \text{ طريقة.}$$

$$(b) \quad 7 = 4 + 3 \text{ طرق}$$

مضروب العدد والتوافيق

تعريف: إذا كان n عدد طبيعياً فإن

$$(a) \quad \text{مضروب العدد } n \text{ هو } n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (2)(1)$$

$$(b) \quad 1 = 0!$$

مثال:

$$a) \quad 5! \quad b) \quad \frac{9!}{7!} \quad c) \quad (5+3)! \quad d) \quad 5! + 3!$$

الحل:

$$a) \quad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$b) \quad \frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} \\ = 72$$

$$c) \quad (5+3)! = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ = 40320$$

$$d) \quad 5! + 3! = 120 + 6 \\ = 126$$

تعريف: توافق n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة يرمز له بالرمز

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad r \leq n$$

مثال: جد

a) $\binom{5}{2}$ b) $\binom{7}{3}$

الحل:

a) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!}$
 $= 10$

b) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$

خصائص التوافق

1) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$

3) $\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \Leftrightarrow a = b \text{ or } a + b = n$

مثال:

جد حل المعادلة

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{x^2}$$

الحل:

$$x^2 - 4$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \pm 2 \\ x^2 + 4 &= 5 & \Rightarrow & x^2 = 1 \\ & & \Rightarrow & x = \pm 1 \end{aligned}$$

الوسط التوافقي والوسط الهندسي

تعريف: إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n مجموعة من المشاهدات فإن:

(a) الوسط الهندسي لهذه المشاهدات

$$\bar{X}_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

(b) الوسط التوافقي لهذه المشاهدات

$$\begin{aligned} \bar{X}_h &= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \\ &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \end{aligned}$$

ملاحظة: باستخدام قوانين اللوغاريتمات يمكن كتابة العلاقة الموجودة في الفقرة a من التعريف على الصورة

$$\ln \bar{X}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

مثال:

جد الوسط الهندسي والوسط التوافقي للمشاهدات

8 ، 4 ، 2

الحل:

$$\begin{aligned} \bar{X}_g &= \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\bar{X}_h = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}$$

$$= \bar{X}_g = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8}$$

$$= 3.43$$

العمليات على المجموعات وقوانينها

إذا كانت A ، B مجموعتين فإن

- a) $A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$
- b) $A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$
- c) $A - B = \{x: x \in A \text{ and } x \notin B\}$
- d) $\bar{A} = U - A$

حيث U هي المجموعة الكلية وهي أكبر مجموعة قيد الدراسة.

تعريف:

(a) مجموعة جزئية من المجموعة B ويرمز لذلك بالرمز (ACB) إذا كان كل

عنصر في A موجودا في B.

(b) $A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ and } B \subset A$

(c) المجموعة الخالية هي تلك المجموعة التي لا يوجد فيها أي عنصر ويرمز لها

بالرمز ϕ أو $\{ \}$.

مثال:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 2, 4\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

أوجد

- 1) $A \cup B$
- 2) $A \cap B$
- 3) $A - B$
- 4) \bar{A}
- 5) $\bar{A} \cap \bar{B}$
- 6) $\overline{A \cap B}$

الحل:

- 1) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$
- 2) $A \cap B = \{4\}$
- 3) $A - B = \{1, 2\}$
- 4) $\bar{A} = \{3, 5, 6\}$
- 5) $A \cap B = \{3, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3\}$
 $= \{3\}$
- 6) $\overline{A \cap B} = \{ \}$

أهم قوانين المجموعات

- 1) $A \cup A = A$
- 2) $A \cap A = A$
- 3) $A \cup B = B \cup A$
- 4) $A \cap B = B \cap A$
- 5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

نظرية:

إذا كانت A ، B مجموعتين ، ACB فإن

- a) $A \cap B = A$
- b) $A \cup B = B$

تعريف: مجموعة القوى للمجموعة A يرمز لها بالرمز $P(A)$ وتكون

$$P(A) = \{X : X \subset A\}$$

ويكون

$$\#(P(A)) = 2^{\#(A)}$$

مثال:

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$

الحل:

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

مجموعات الأعداد

1- مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

2- مجموعة الأعداد الصحيحة $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

3- مجموعة الأعداد الحقيقية $R = (-\infty, \infty)$

ملحق

(2)

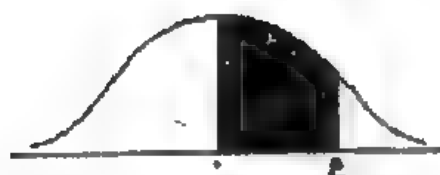
جدول الأرقام العشوائية

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 51772 | 74640 | 42331 | 29044 | 46621 | 62898 | 93582 | 04186 | 19640 | 87056 |
| 54033 | 23491 | 83587 | 06568 | 21960 | 21387 | 76105 | 10863 | 97453 | 90581 |
| 45939 | 60173 | 52078 | 25424 | 11645 | 55870 | 56974 | 37428 | 93507 | 94271 |
| 03585 | 79353 | 81938 | 82322 | 96799 | 85659 | 36081 | 50884 | 14070 | 42187 |
| 64937 | 03355 | 95863 | 20790 | 65304 | 55189 | 00745 | 62528 | 11822 | 15804 |
| 15630 | 64759 | 51135 | 98527 | 62586 | 41889 | 25439 | 88036 | 24034 | 67283 |
| 21681 | 91157 | 77331 | 60710 | 52290 | 16835 | 48653 | 71590 | 16159 | 14676 |
| 91097 | 17480 | 29414 | 06829 | 87843 | 28195 | 27279 | 47152 | 35683 | 47280 |
| 50532 | 25496 | 95652 | 42457 | 78547 | 76552 | 50020 | 24849 | 52984 | 76168 |
| 07136 | 40876 | 79971 | 54195 | 25708 | 51817 | 36732 | 72484 | 94923 | 75985 |
| 27989 | 64728 | 10744 | 089396 | 56242 | 90985 | 28868 | 99431 | 50995 | 20507 |
| 86181 | 78949 | 86601 | 46258 | 00477 | 25234 | 09903 | 36574 | 72139 | 70185 |
| 54308 | 21154 | 97810 | 86764 | 82869 | 11785 | 55261 | 59009 | 38714 | 38723 |
| 65541 | 34371 | 09591 | 07889 | 58892 | 92843 | 72828 | 91341 | 84821 | 63886 |
| 08263 | 65952 | 85762 | 64236 | 39238 | 18776 | 84303 | 99247 | 46149 | 03229 |
| 39817 | 67906 | 48236 | 16057 | 81812 | 15815 | 63700 | 85915 | 19219 | 45943 |
| 62257 | 04077 | 79443 | 95203 | 02479 | 30763 | 92486 | 54083 | 23631 | 05325 |
| 53298 | 90276 | 62545 | 21944 | 16580 | 03878 | 07516 | 95715 | 02526 | 33537 |

أخذت الجداول في هذا الملحق من كتاب

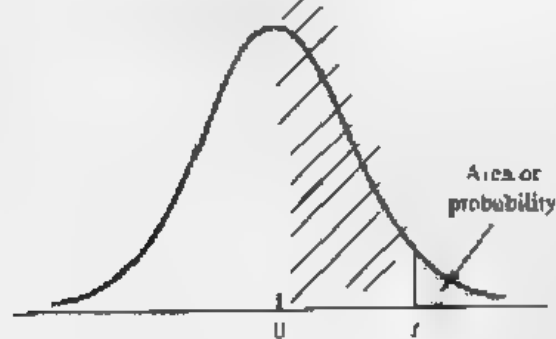
(Theory and Problems of Statistics) By (Murray R. Spiegel)

جدول التوزيع الطبيعي المعياري



| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0754 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2258 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2518 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2612 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2996 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |
| 3.1 | 0.4990 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4993 | 0.4993 |
| 3.2 | 0.4993 | 0.4993 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 |
| 3.3 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4997 |
| 3.4 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4998 |
| 3.5 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 |
| 3.6 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.7 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.8 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.9 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |

TABLE 2: DISTRIBUTION



Entries in the table give t values for an area or probability in the upper tail of the t distribution. For example, with 10 degrees of freedom and a .05 area in the upper tail, $t_{.05} = 1.812$.

| Degrees of Freedom | Area in upper tail | | | | |
|--------------------|--------------------|-------|--------|--------|--------|
| | .10 | .05 | .025 | .01 | .005 |
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.941 | 5.821 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.465 | 4.032 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 1.383 | 1.834 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.013 |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.463 | 2.756 |
| 30 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 40 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 60 | 1.290 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 120 | 1.289 | 1.659 | 1.980 | 2.359 | 2.617 |
| ∞ | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

This table is reprinted by permission of Oxford University Press on behalf of The Biometrika Trustees from Table 12, *Percentage Points of the t Distribution*, by C. S. Pearson and H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, 3rd ed., 1966.

TABLE 3 CHI-SQUARE DISTRIBUTION



Entries in the table give χ^2 values, where ϕ is the area of probability in the upper tail of the chi-square distribution. For example, with 10 degrees of freedom and .10 area in the upper tail $\chi^2_{.10} = 23.2093$.

| Degrees of Freedom | Area in Upper Tail | | | | | | | | | |
|--------------------|--------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| | .995 | .99 | .975 | .95 | .90 | .80 | .70 | .60 | .50 | .005 |
| 1 | 161.278 | 106.213 | 84.206 | 73.361 | 63.691 | 55.818 | 49.337 | 43.822 | 39.402 | 1.385 |
| 2 | 10.597 | 7.378 | 5.988 | 5.024 | 4.317 | 3.778 | 3.357 | 3.023 | 2.703 | 0.010 |
| 3 | 10.243 | 7.879 | 6.251 | 5.141 | 4.413 | 3.858 | 3.421 | 3.076 | 2.746 | 0.050 |
| 4 | 10.591 | 8.034 | 6.388 | 5.191 | 4.477 | 3.919 | 3.479 | 3.134 | 2.801 | 0.100 |
| 5 | 11.142 | 8.245 | 6.626 | 5.401 | 4.685 | 4.133 | 3.688 | 3.343 | 2.992 | 0.150 |
| 6 | 11.591 | 8.455 | 6.853 | 5.646 | 4.915 | 4.361 | 3.913 | 3.567 | 3.200 | 0.200 |
| 7 | 12.017 | 8.671 | 7.079 | 5.891 | 5.156 | 4.594 | 4.143 | 3.796 | 3.417 | 0.250 |
| 8 | 12.401 | 8.878 | 7.289 | 6.103 | 5.397 | 4.827 | 4.374 | 4.027 | 3.633 | 0.300 |
| 9 | 12.750 | 9.077 | 7.489 | 6.313 | 5.619 | 5.059 | 4.604 | 4.256 | 3.858 | 0.350 |
| 10 | 13.121 | 9.236 | 7.693 | 6.501 | 5.828 | 5.279 | 4.821 | 4.473 | 4.079 | 0.400 |
| 11 | 13.421 | 9.372 | 7.879 | 6.676 | 6.027 | 5.488 | 5.027 | 4.688 | 4.296 | 0.450 |
| 12 | 13.690 | 9.493 | 8.042 | 6.838 | 6.216 | 5.688 | 5.221 | 4.891 | 4.509 | 0.500 |
| 13 | 13.938 | 9.601 | 8.191 | 6.988 | 6.393 | 5.879 | 5.403 | 5.092 | 4.719 | 0.550 |
| 14 | 14.166 | 9.697 | 8.329 | 7.127 | 6.559 | 6.059 | 5.574 | 5.281 | 4.927 | 0.600 |
| 15 | 14.364 | 9.783 | 8.458 | 7.256 | 6.715 | 6.221 | 5.734 | 5.459 | 5.133 | 0.650 |
| 16 | 14.541 | 9.860 | 8.578 | 7.377 | 6.861 | 6.371 | 5.883 | 5.625 | 5.337 | 0.700 |
| 17 | 14.697 | 9.929 | 8.690 | 7.490 | 6.998 | 6.505 | 6.021 | 5.789 | 5.539 | 0.750 |
| 18 | 14.838 | 10.000 | 8.795 | 7.596 | 7.128 | 6.628 | 6.154 | 5.952 | 5.739 | 0.800 |
| 19 | 14.963 | 10.064 | 8.893 | 7.695 | 7.250 | 6.741 | 6.274 | 6.113 | 5.938 | 0.850 |

| | | | | | | | | | | |
|-----|---------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 20 | 7.45786 | 8.26040 | 9.55063 | 10.3508 | 12.4426 | 28.4120 | 31.4104 | 34.1696 | 37.5862 | 39.9968 |
| 21 | 8.05366 | 8.87720 | 10.28293 | 11.5913 | 13.2396 | 29.6151 | 32.6105 | 35.4789 | 38.9321 | 41.4010 |
| 22 | 8.64272 | 9.54249 | 10.9823 | 12.3240 | 14.0415 | 30.8133 | 33.9244 | 36.7807 | 40.2894 | 42.7958 |
| 23 | 7.26042 | 10.19567 | 11.6885 | 13.1905 | 14.8439 | 32.1059 | 35.1725 | 38.0757 | 41.6384 | 44.1813 |
| 24 | 9.88623 | 10.8564 | 12.4011 | 13.8484 | 15.6527 | 33.1963 | 36.4151 | 39.3641 | 42.9798 | 45.5585 |
| 25 | 10.5197 | 11.5240 | 13.1597 | 14.6114 | 16.4774 | 34.3816 | 37.6525 | 40.0665 | 44.3141 | 46.9278 |
| 26 | 11.1903 | 12.2981 | 13.8439 | 15.3791 | 7.2919 | 35.5631 | 38.8852 | 41.9232 | 45.6417 | 48.2899 |
| 27 | 11.8076 | 12.8786 | 14.5733 | 16.1533 | 8.1138 | 36.7412 | 40.1133 | 43.1944 | 46.9630 | 49.6429 |
| 28 | 12.4613 | 13.5648 | 15.3079 | 16.9275 | 18.9392 | 37.9159 | 41.3372 | 44.4607 | 48.2782 | 50.9933 |
| 29 | 13.1211 | 14.2565 | 16.0471 | 17.7082 | 19.7677 | 39.0875 | 42.5565 | 45.7222 | 49.5879 | 52.3336 |
| 30 | 13.7867 | 14.9535 | 16.7908 | 18.4926 | 20.5992 | 40.2560 | 43.7729 | 46.9792 | 50.8922 | 53.6720 |
| 40 | 20.7065 | 23.1643 | 24.4331 | 26.5093 | 29.0595 | 51.8050 | 55.1585 | 59.3417 | 63.6907 | 66.7656 |
| 50 | 27.9907 | 29.7067 | 32.3574 | 34.7642 | 37.6886 | 63.1671 | 67.5018 | 71.4202 | 76.1539 | 79.4900 |
| 60 | 35.5340 | 37.8848 | 40.4817 | 43.1879 | 46.4589 | 74.3970 | 79.0819 | 83.2976 | 88.3794 | 91.9517 |
| 70 | 43.2752 | 45.4418 | 48.7576 | 51.7993 | 55.3290 | 85.5271 | 90.3312 | 95.0231 | 100.425 | 104.215 |
| 80 | 51.1720 | 53.5400 | 57.1532 | 60.3915 | 64.2778 | 96.5782 | 101.879 | 106.629 | 112.325 | 116.321 |
| 90 | 59.1963 | 61.7541 | 65.6456 | 69.1260 | 73.2912 | 107.565 | 113.45 | 118.136 | 124.14 | 128.299 |
| 100 | 67.5276 | 70.0648 | 74.2219 | 77.9295 | 82.3581 | 118.498 | 124.347 | 129.561 | 135.807 | 140.167 |

This table is reprinted by permission of Oxford University Press on behalf of The Biometrika Trustees from Table 8 Percentage Points of the χ^2 Distribution, by F. S. Pearson and H. O. Hurler, *Biometrika Tables for Statisticians* Vol. 1 3rd ed., 1966

فهرسة المصطلحات عربي إنجليزي

Index

| | |
|------------------------------------|------------------------|
| Probability | الاحتمال |
| Conditional Probability | - الاحتمال المشروط |
| Probability Distribution | - التوزيع الاحتمالي |
| Statistics | - الإحصاء |
| Fertility Statistics | - إحصاءات الخصوبة |
| Inductive Statistics | - الإحصاء الاستدلالي |
| Vital Statistics | - الإحصاءات الجوية |
| Census | - إحصاءات السكان |
| Descriptive Statistics | - الإحصاء الوظيفي |
| Mortality Statistics | - إحصاءات الوفيات |
| Statistical Data | - البيانات الإحصائية |
| Statistical Populations | - المجتمع الإحصائي |
| Union | الاتحاد |
| Correlation | الارتباط |
| Correlation Coefficient | معامل الارتباط |
| Pearson's Correlation Coefficient | - معامل ارتباط بيرسون |
| Spearman's Correlation Coefficient | - معامل ارتباط سبيرمان |
| Questionnaire | الاستبيان |
| Random numbers | الأرقام العشوائية |
| Real numbers | الأعداد الحقيقية |
| Integer numbers | الأعداد الصحيحة |

| | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| Natural numbers | الأعداد الطبيعية |
| Probability density function | اقتران الكثافة الاحتمالية |
| Mean deviation | الانحراف المتوسط |
| Standard deviation | الانحراف المعياري |
| Variance | التباين |
| Random experiment | تجربة عشوائية |
| Kurtosis | التفرطح |
| Intersection | التقاطع |
| Estimation of trend | تقدير مركبة الاتجاه |
| Estimation of seasonal variation | تقدير مركبة الفصل |
| Frequency | التكرار |
| Cumulative frequency | - التكرار التراكمي |
| Relative frequency | - التكرار النسبي |
| Frequency histogram | - المدرج التكراري |
| Frequency polygon | - المضلع التكراري |
| Frequency curve | - المنحنى التكراري |
| Cumulative frequency curve | - المنحنى التكراري التراكمي |
| Relative frequency curve | - المنحنى التكراري النسبي |
| Forecast | التنبؤ |
| Expectation | التوقع |
| Combinations | التوافيق |
| Frequency distribution | التوزيع التكراري |
| Frequency distribution table | جدول التوزيع التكراري |
| Probability distribution | التوزيع الاحتمالي |

| | |
|-------------------------------|------------------------------|
| Mono-mode distribution | توزيع أحادي المنوال |
| Mulry-mode distribution | - توزيع متعدد المنوال |
| Normal distribution | توزيع طبيعي |
| Standared normal distribution | - توزيع طبيعي معياري |
| Skewed distribution | توزيع ملتو |
| Event | الحادث |
| Sure event | - الحادث الأكيد |
| Null event | - الحادث المستحيل |
| Independent events | - الحوادث المستقلة |
| Simple event | - الحادث البسيط |
| Complementary event | - الحادث المتمم |
| Compound events | - الحادث المركب |
| Disjoint events | - الحوادث المنفصلة |
| Mutually exclusive events | - الحوادث المتباعدة والشاملة |
| Lower class limit | الحد الأدنى للفئة |
| Upper class event | الحد الأعلى للفئة |
| Lower class boundary | الحد الأدنى الفعلي للفئة |
| Upper class boundary | الحد الأعلى الفعلي للفئة |
| Sample size | حجم العينة |
| Population size | حجم المجتمع |
| Actual income | الدخل الحقيقي |
| Quartile | الربيع |
| Range of the variable | رتبة المتغير |
| Index number | الرقم القياسي |

| | |
|--|---------------------------------|
| Simple index number | - الرقم القياسي البسيط |
| Simple aggregate index number | - الرقم القياسي التجميعي البسيط |
| Simple relative index number | - الرقم القياسي النسبي البسيط |
| Price index number | - الرقم القياسي للأسعار |
| Quantities index number | - الرقم القياسي للكميات |
| Cost of living index number | - الرقم القياسي لتكاليف المعيشة |
| Weighted index number | - الرقم القياسي المرجح |
| Seasonal index number | - الرقم القياسي العنصري |
| Paasche index number for prices | - رقم باش للأسعار |
| Paasche index number for quantities | - رقم باش للكميات |
| Laspeyres index number for prices | - رقم لاسبير للأسعار |
| Laspeyres index number for quantities | - رقم لاسبير للكميات |
| Fisher's ideal index number for prices | - رقم فشر الأمثل للأسعار |
| Fisher's ideal index number for quantities | - رقم فشر الأمثل للكميات |
| Marshall index number for prices | - رقم مارشال للأسعار |
| Marshall index number for quantities | - رقم مارشال للكميات |
| Sum simple | رمز المجموع |
| Base time | زمن الأساس |
| Comparison time | زمن المقارنة |
| Time series | السلسلة الزمنية |
| Pregnancy rage | سن الحمل |
| Free hand method | طريقة التمهيد باليد |
| Broken line method | طريقة الخط المنكسر |

| | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| Smooth line method | الخط المنحني |
| Picture method | طريقة الصور |
| Pie charts method | طريقة القطاع الدائري |
| Moving averages method | طريقة المتوسطات المتحركة |
| Rectangular method | طريقة المستطيلات |
| The method of least squares | طريقة المربعات الصغرى |
| The average percentage method | طريقة النسب المئوية للمعدل |
| Ratio to trend method | طريقة النسبة إلى الاتجاه العام |
| Ratio to moving average method | طريقة النسبة إلى المتوسطات المتحركة |
| The method of semi-averages | طريقة نصف السلسلة |
| The link relative method | طريقة الوصل النسبية |
| Moments | العزوم |
| Deciles | العشير |
| Positive relation | علاقة إيجابية (طرديّة) |
| Negative relation | علاقة سلبية (عكسيّة) |
| Raw mark | العلاقة الخام |
| Standard mark | العلاقة المعيارية |
| Sample | العينة |
| Random sample | - العينة العشوائية |
| Stratified sample | - العينة الطبقيّة |
| Systematic random | - العينة العشوائية المنتظمة |
| Standard sample | - العينة المعيارية |
| Class | الفئة |
| Class strength | - طول الفئة |

| | |
|----------------------------|----------------------------|
| Class mark | - مركز الفئة |
| Percentril class | - الفئة المئينية |
| Mode class | - الفئة المنوالية |
| Mediar class | - الفئة الوسيطة |
| Sample space | فضاء العينة |
| Demorgan's laws | قوانين ديمورغان |
| Skewness | الالتواء |
| Percentile | المئين |
| Percentile rank | - الرتبة المئينية |
| Counting principle | مبدأ العد |
| Random variable | المتغير العشوائي |
| Rane of random variable | - مدى المتغير العشوائي |
| Continuous random variable | - المتغير العشوائي المتصل |
| Discrete random variable | - المتغير العشوائي المنفصل |
| Complement | متمة |
| Moving averages | المتوسطات المتحركة |
| Set | مجموعة |
| Empty set | - مجموعة خالية |
| Subset | - مجموعة جزئية |
| Universal set | - مجموعة كلية |
| Operations of sets | العمليات على المجموعات |
| Range | المدى (المدى المطلق) |
| Interquartile range | المدى الربيعي |
| Deciles range | المدى العشري |

| | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| Component of time series | مركبة السلسلة الزمنية |
| Secular trend | مركبة الاتجاه |
| Cyclical component | مركبة الدورة |
| Irregular (random) variation | مركبة الخطأ (العشوائية) |
| Seasonal variation | مركبة الفصل |
| Observation | المشاهدة (المفردة) |
| Factorial | المضروب |
| Equation of an appropriate trend | معادلة الاتجاه العام |
| Regression line equation | معادلة خط الانحدار |
| Roughness coefficient | معامل الخشونة |
| Crude partiality rate | معدل الخصوبة العام |
| Married woman's partiality rate | معدل الخصوبة للنساء المتزوجات |
| Age specific vertility rate | معدل الخصوبة المحدد بفترة عمرية |
| Seasonal average | المعدل الفصلي |
| Immigration rate | معدل الهجرة |
| Crude death rate | معدل الوفاة الخام |
| Infant nortality rate | معدل وفيات الرضع |
| Neonatal mortality rate | معدل وفيات حديثي الولادة |
| Maternal nortality rate | معدل وفيات الأمومة |
| Crude birth rate | معدل الولادة الخام |
| Measures of dispersion | مقاييس التشتت |
| Central tendency measures | مقاييس النزعة المركزية |
| Historical curve | المنحنى التاريخي |
| Mode | النوال |

| | |
|------------------|------------------|
| New borns | المواليد الأحياء |
| Binomial theorem | نظرية ذات الحدين |
| Bayes theorem | نظرية بيز |
| Immigration | الهجرة |
| Mean | الوسط الحسابي |
| Harmonic mean | - الوسط التوافقي |
| Guessed mean | - الوسط الفرضي |
| Weighted mean | - الوسط الموزون |
| Geometric | - الوسط الهندسي |
| Median | الوسيط |

المراجع

أولاً: المراجع العربية

- 1- مختار الهانسي، مبادئ الإحصاء، الدار الجامعية، بيروت 1993.
- 2- محمد أبو صالح، مقدمة في الإحصاء، مركز الكتب الأردني، عمان 1990.
- 3- محمد مظلوم حمدي، طرق الإحصاء، دار المعارف مصر، 1965.
- 4- أحمد عبادة سرحان، الإحصاء، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية 1977.
- 5- عبد الحسين زيني، الإحصاء السكاني، وزارة التعليم العالي، بغداد 1980.
- 6- مدني دسوقي مصطفى، مبادئ في علم الإحصاء، دار النهضة العربية، مصر 1977.

ثانياً: المراجع الأجنبية

- 1- Murray R. Spiegel, Theory and problems of Statistics, Mc Graw-Hill. New York 1987.
- 2- William Mendenhall, Introduction to Probability and Statistics, 5 the edition.
- 3- David R. Anderson, Statistics for business and economics, 8th edition, south-western, a division of Thomas learning.

